OPTIMIZACIÓN DE CORTES UTILIZANDO MODELOS MATEMÁTICOS

Miguel Angel Álvarez
Escuela de Ingeniería, Universidad La Salle

RESUMEN.

En las industrias donde se utilizan los cortes de material, es importante optimizar los recursos disponibles y minimizar el desperdicio, tal es el caso de la industria metal-mecánica en donde se efectúan cortes circulares para las tapas de los motores y bombas de agua, en la repostería la obtención de las bases para los pasteles, en la industria alimenticia los *cortes* a partir de un molde para obtener la cantidad máxima por metro lineal de tortillas y varias aplicaciones más como primera etapa. En la segunda etapa, se consideran cortes rectangulares como por ejemplo: las libretas, rollos de papel; hojas para papel periódico, rollos de papel sanitario, etc.; minimizando el desperdicio y proporcionando una metodología de cómo realizar los cortes mediante un modelo matemático.

INTRODUCCIÓN.

Es importante minimizar el desperdicio de material en industrias donde se hacen una gran cantidad de cortes, como por ejemplo, el obtener las tapas de los motores o bombas de agua, cortar las bases de los pasteles, por citar algunos casos. En esta primera etapa se considera un problema auxiliar resuelto por Catalan y cuya metodología se adapta para nuestros fines, que es el de: "minimizar el desperdicio en cortes".

Supongamos que se tiene un cono ABC (figura 1), se inscribe un círculo 01, después entre el espacio comprendido de éste y el resto de la superficie del cono se inscribe un segundo círculo 02, y así sucesivamente hasta agotar la superficie del cono.

¿Cuál es el límite de volúmenes de todos los círculos?

La demostración que responde a dicha pregunta la presenta E. Catalan en su libro: "Problémes de Géometrie", París 1878 y el límite de todos los círculos es 2/3 el volumen total del cono.

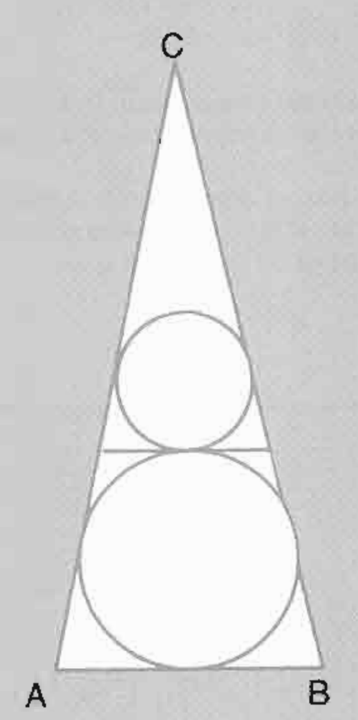


figura 1

I. PRIMERA PARTE.

Aplicación a cortes en la industria siderúrgica.

Utilizando esta idea y aplicándola a la optimización de cortes de tapas de motores (círculos) de un rectángulo, es decir, minimizar el desperdicio en la utilización de cortes, como se describe en la figura 2.

La pregunta es: ¿cómo se deben hacer los cortes de los círculos de tal manera que el área cortada sea máxima? (desperdicio mínimo). Para obtener más fácilmente una metodología, analicemos las posibilidades por separado, a saber: caso de un círculo, caso de dos círculos con radio diferente, caso de tres círculos, y así sucesivamente.

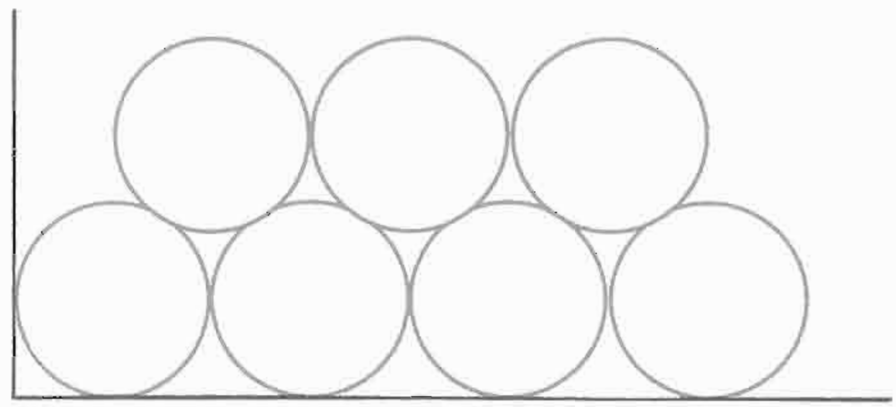


figura 2

Caso 1. Un sólo círculo.

De este caso se deducen todos los demás, siguiendo la metodología aquí expuesta. La mejor manera de hacer los cortes minimizando el desperdicio es como se muestra en la figura 3.

Para ello, se debe calcular la altura h en función del radio de los círculos, en donde evidentemente $h < 4r_1 = 2d_1$. Para conocer esta altura, se necesita calcular la distancia p, ya que de la siguiente igualdad h se expresa en función de p:

$$h = 3r_1 + p, \quad 0 < p < r_1$$

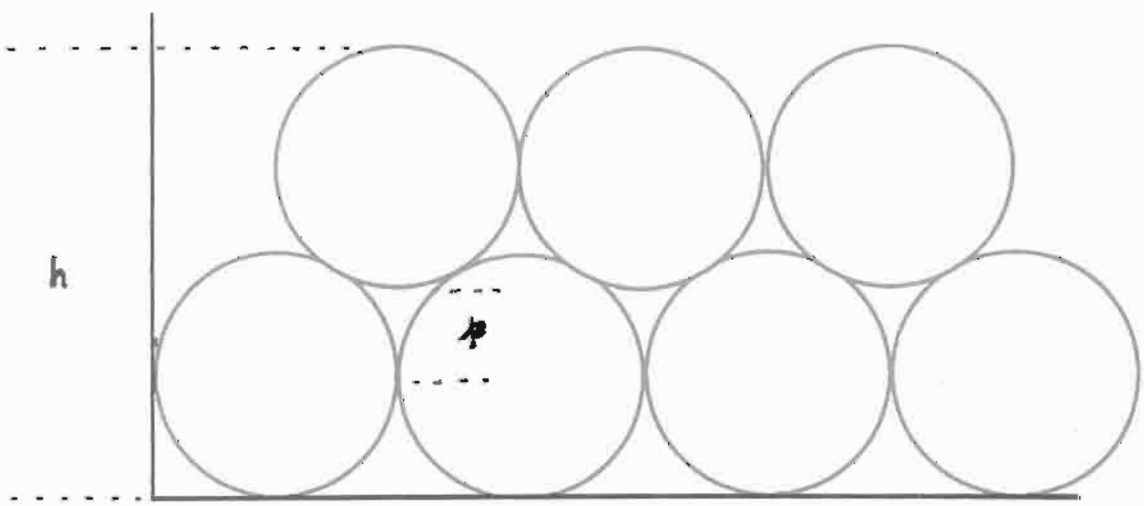
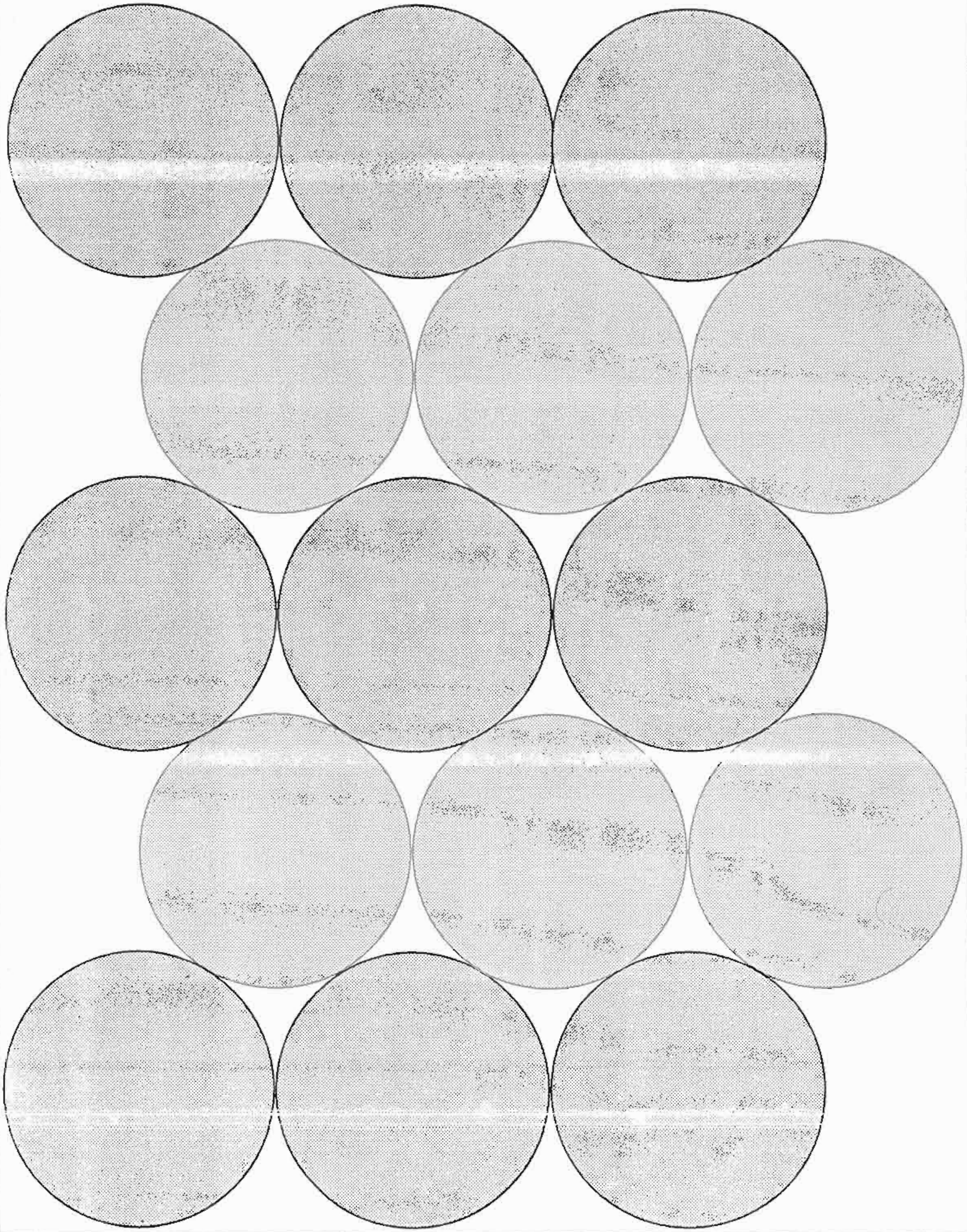
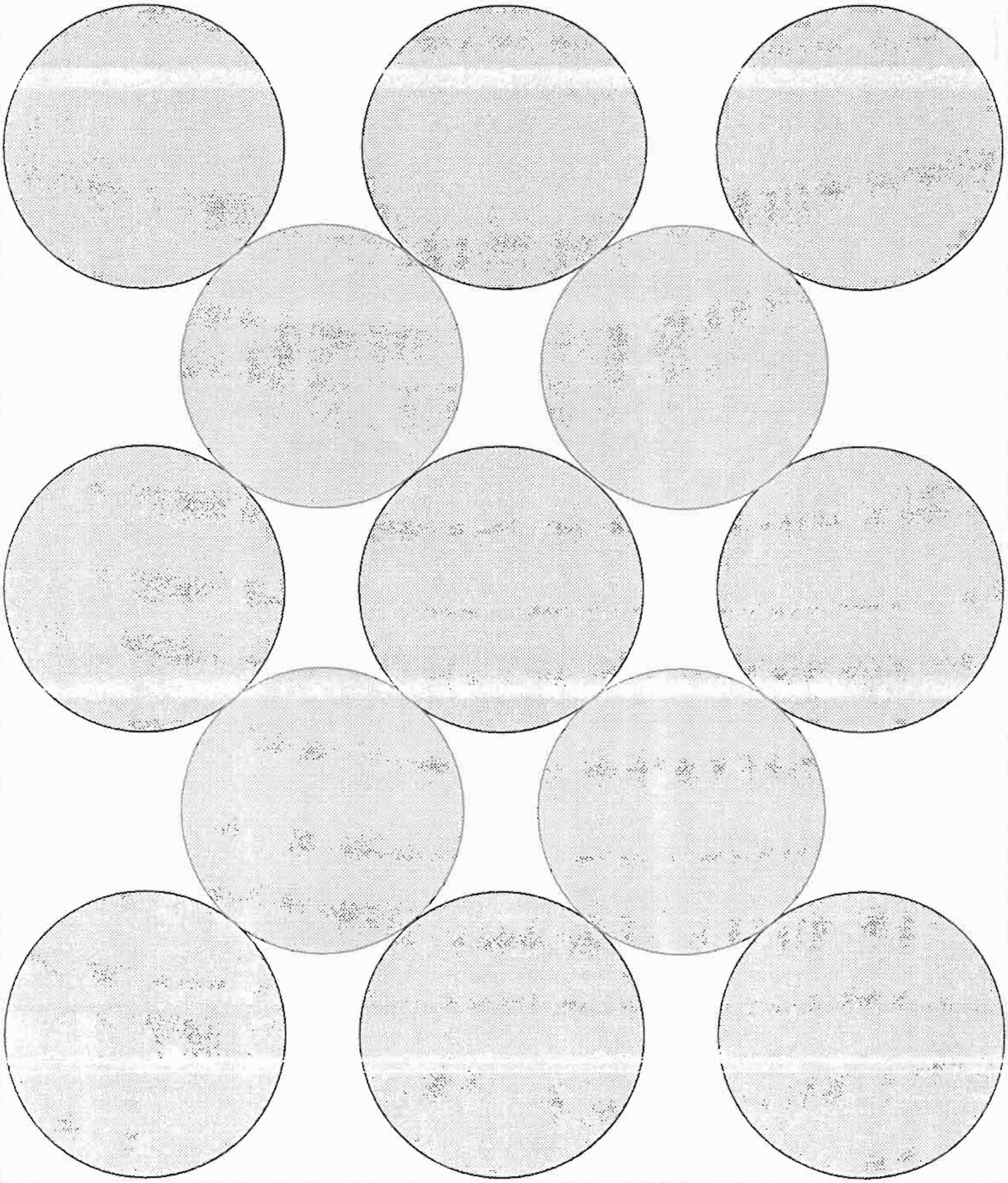
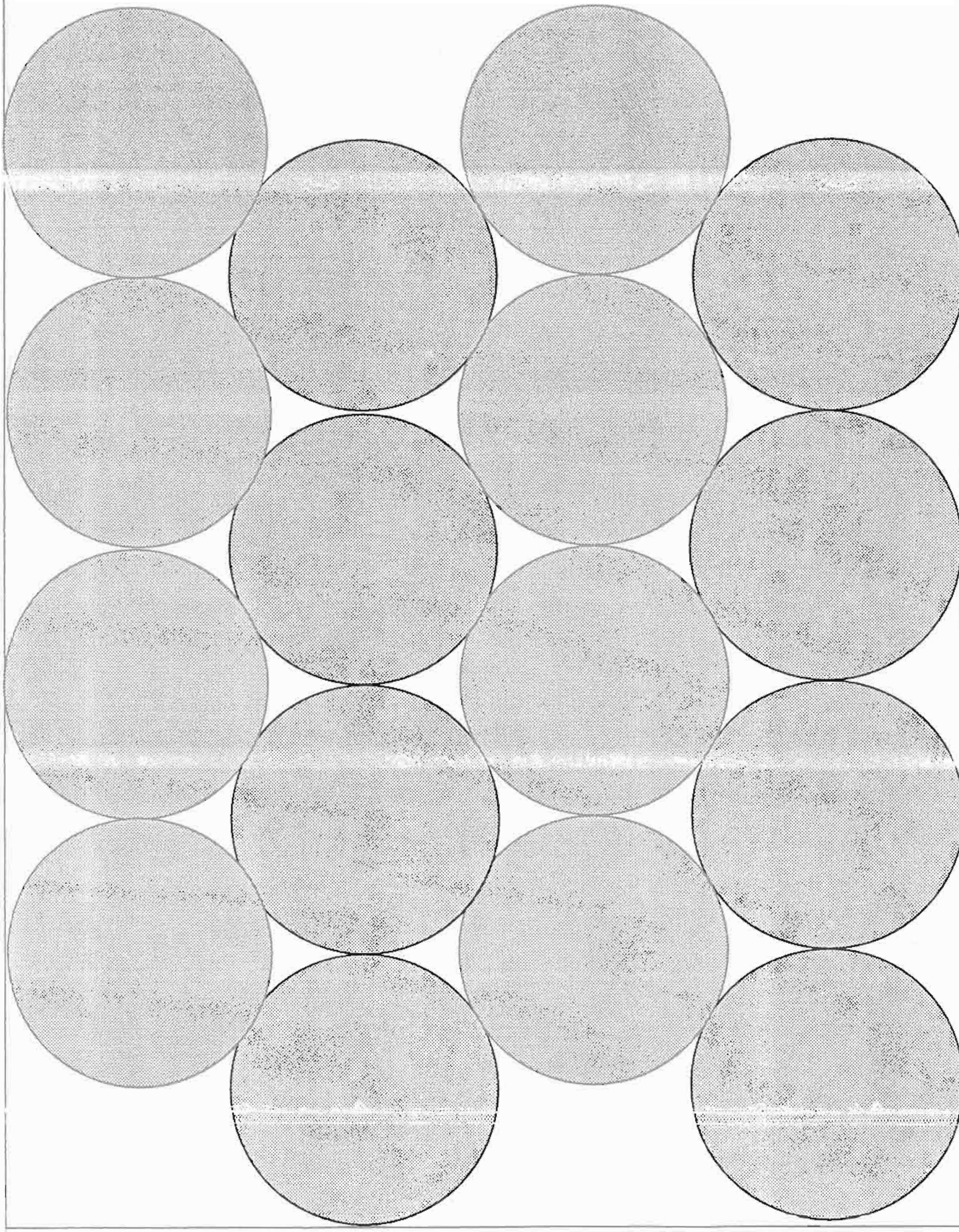
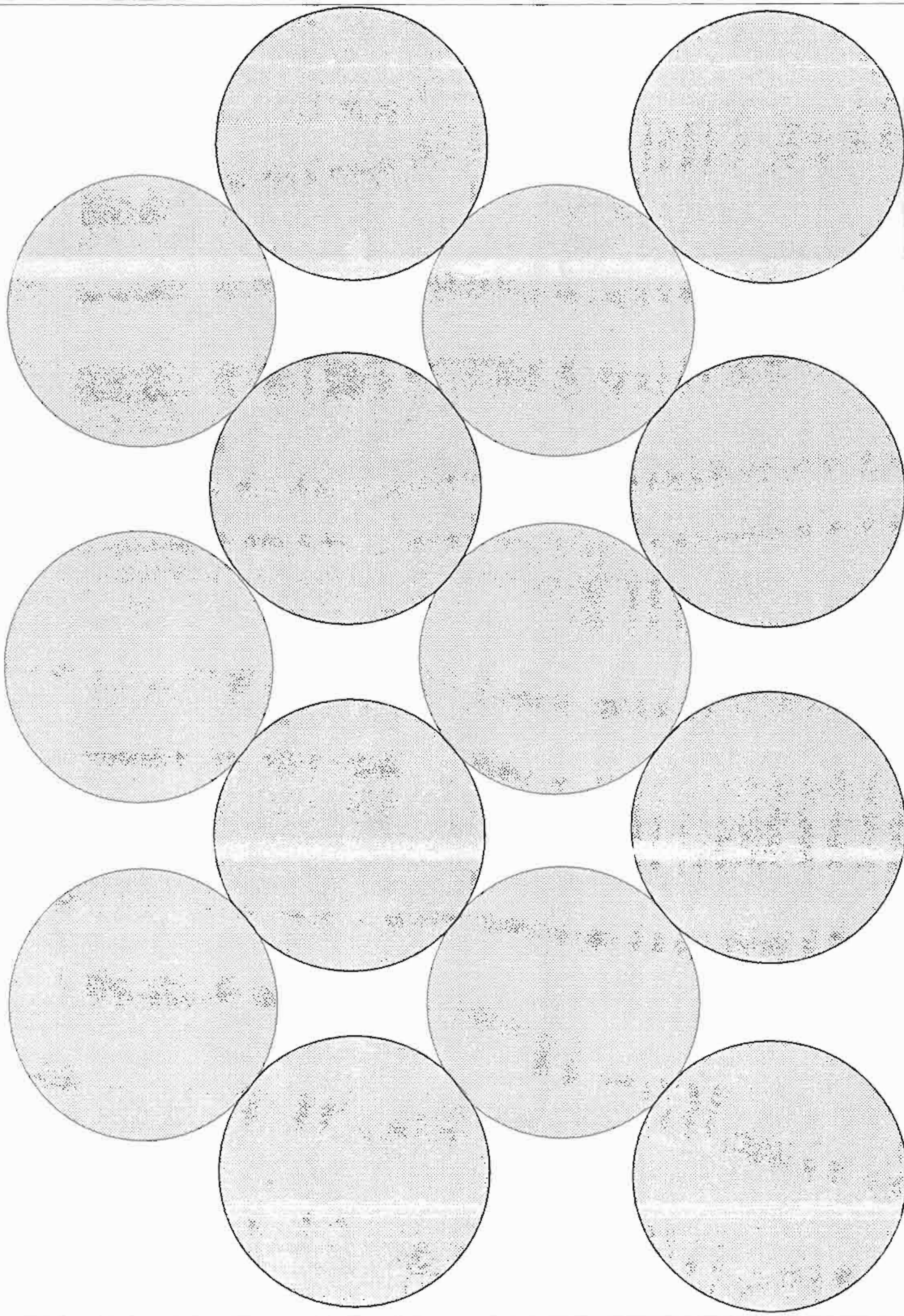


figura 3









Del triángulo rectángulo (▲ abc), aplicando el teorema de Pitágoras, se obtiene el valor de p y con ello el valor de h:

$$p = [(\sqrt{3}) - 1)]r_1$$

Como ilustración anterior, se tienen los 4 diferentes tipos de corte de un rectángulo de 20 x 27.1 cm y con círculos de diámetro d=5.6 cm; del análisis obtenido se deduce que la mejor manera de hacer los cortes es teniendo contiguos todos los círculos.

Caso 2. Dos círculos de radios r_1 y r_2, donde $r_1 > r_2$.

Este caso se ilustra en la figura 4.

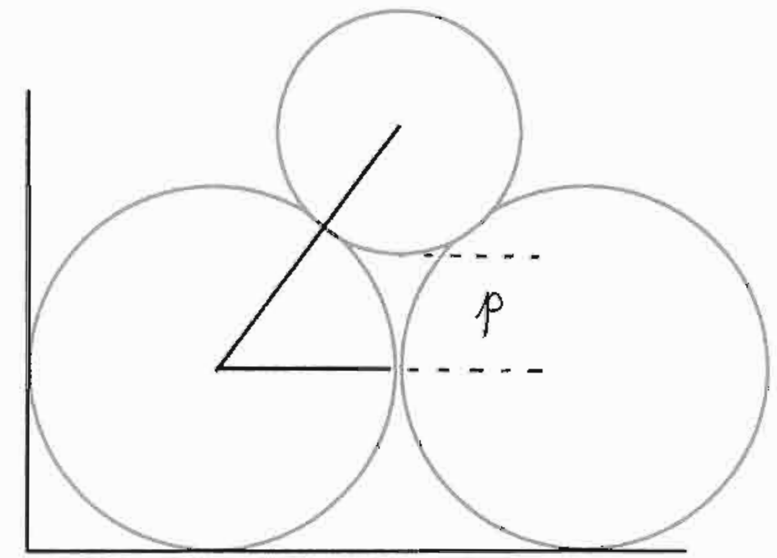


figura 4

Como en el caso anterior hay que calcular la distancia p, que ahora está en función de r_1 y r_2, para obtener la altura h_1 y calcular el número de "capas" posibles para finalmente calcular el área total utilizada. Dado el valor del parámetro p por la siguiente expresión:

$$p = \sqrt{r_2(r_2+2\,r_1)} - r_2$$

La sucesión de alturas h_1, h_2, h_3,... en función de p está dado por las siguientes igualdades:

$$h_1 = 2r_1$$
$$h_2 = r_1 + 2r_2 + p$$
$$h_3 = h_2 + r_1 + (r_1 - p/2)$$
$$h_4 = h_3 + 2r_2 - r_1 + p$$

. . .

. . .

Se puede observar que la mejor forma de efectuar los cortes cuando hay dos círculos de radios r_1 y r_2, con $r_1 \neq r_2$, es comenzar con los cortes del círculo de mayor radio abajo y continuar con los de radio menor y así susecivamente, alternando la posición de ellos sin rebasar el límite del área disponible. También puede ocurrir que en la línea del círculo mayor ya no haya espacio suficiente para el corte de otro círculo, pero sea factible realizar el corte con otro de radio menor, lo cual debe de ser contemplado.

Caso 3. Tres círculos de radios r_1, r_2 y r_3, donde $r_1>r_2>r_3$.

Este caso se ilustra en la figura 5.

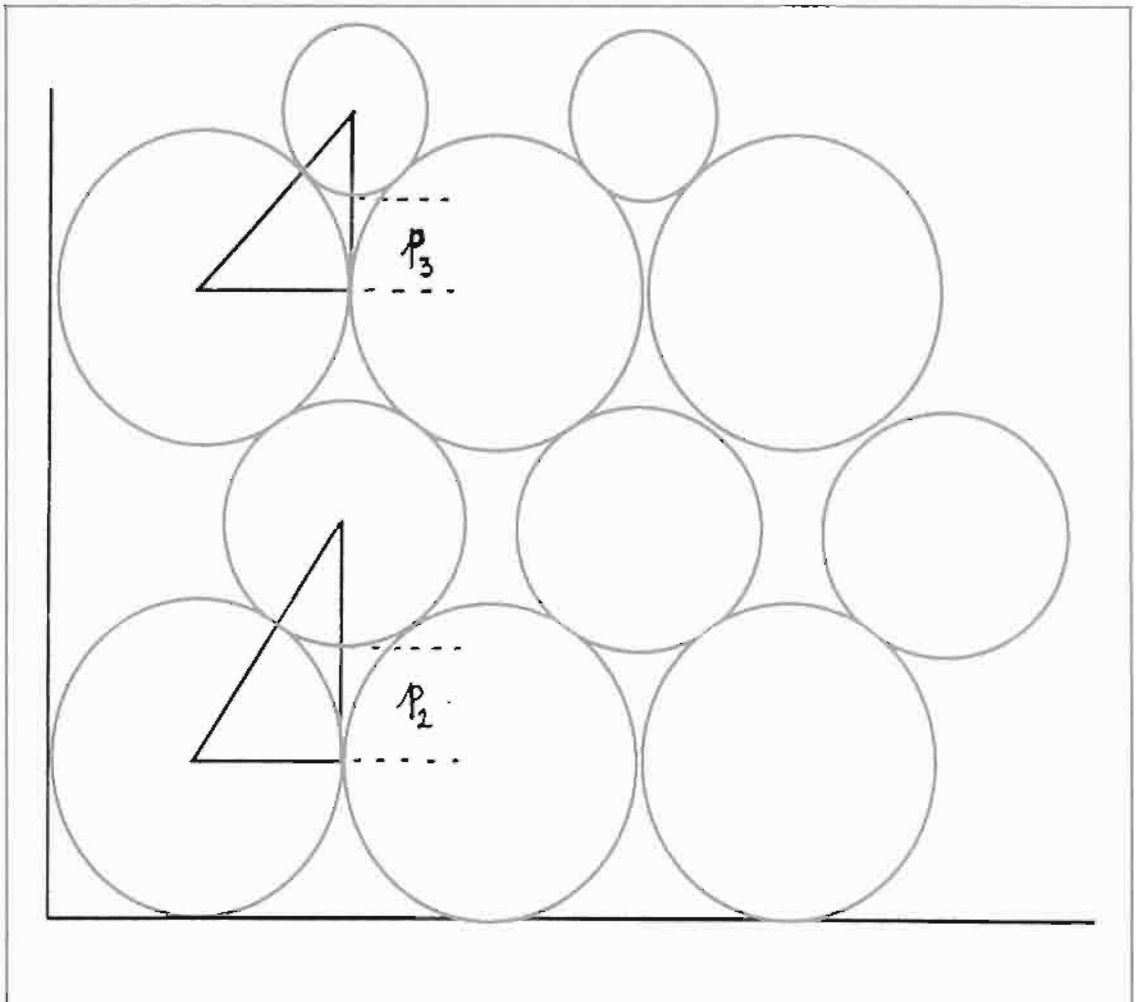


figura 5

En este modelo, se pueden comprobar las igualdades siguientes:

$$p_2 = \sqrt{r_2 \, (r_2 + 2r_1 \, r_2)} - r_2$$

$$p_3 = \sqrt{r_3 \, (r_3 + 2r_1 r_3)} - r_3$$

Además, la sucesión de alturas, en función de los radios es:

$$
\begin{aligned}
h_1 &= 2r_1 \\
h_2 &= h_1 + 2r_2 + p_2 - r_1 \\
h_3 &= h_2 + r_1 + p_2 \\
h_4 &= h_3 + 2r_3 + p_3 - r_1 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Optimizando los cortes no es conveniente el hacerlos con los tres radios consecutivamente al mismo tiempo, pues se obtendrá un mayor desperdicio como se ilustra en la figura 6.

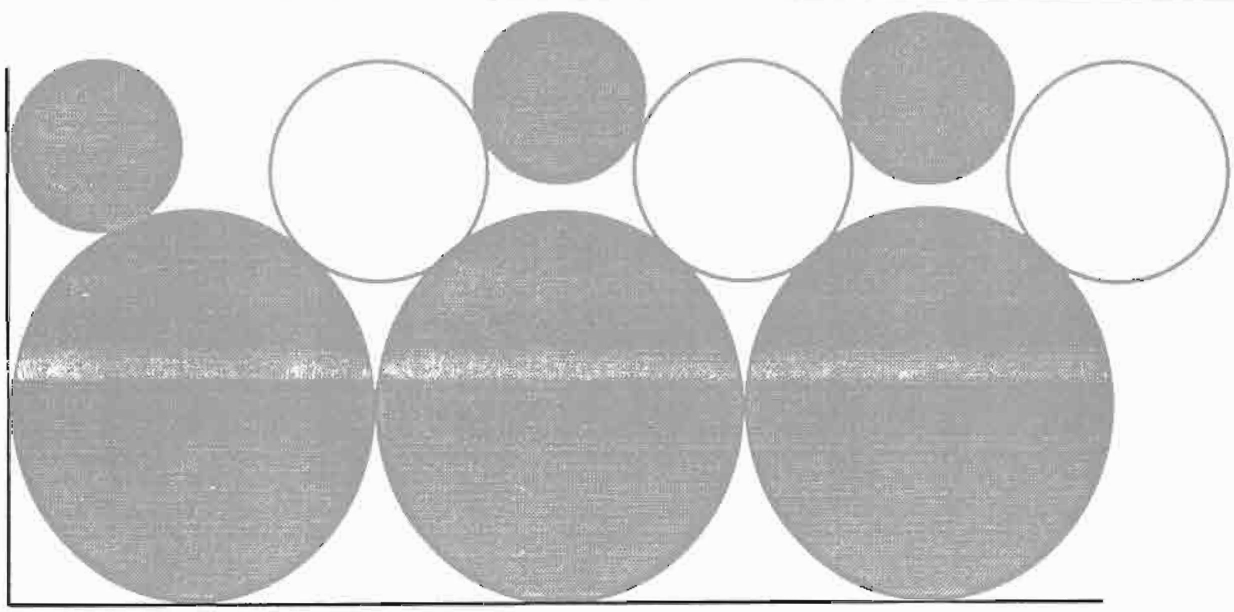


figura 6

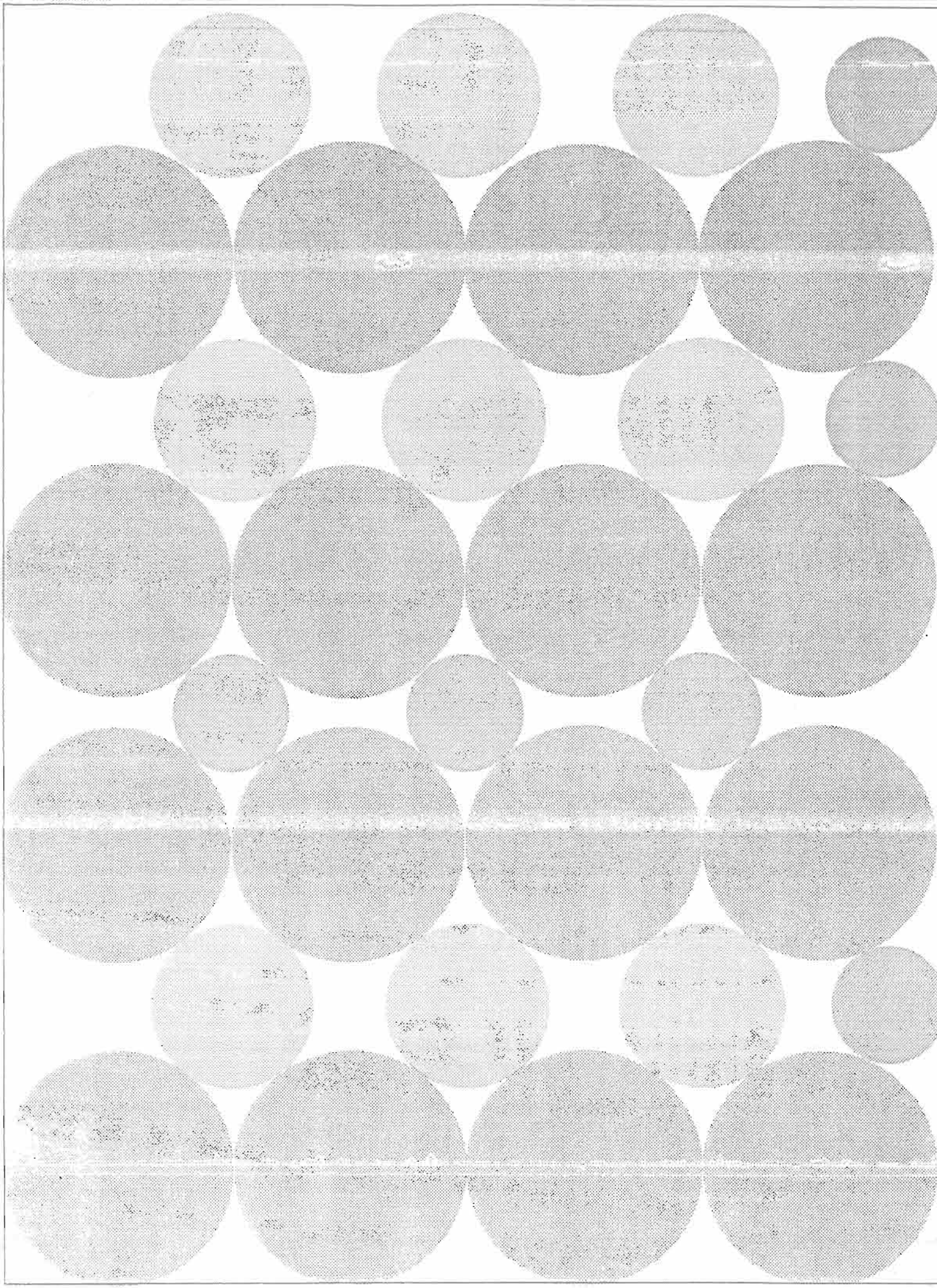
Los siguientes ejemplos, muestran algunos cortes con tres radios diferentes y de los cuales se pueden observar diferentes metodologías para efectuar los mismos, aunque se realicen los cortes con las mismas restricciones.

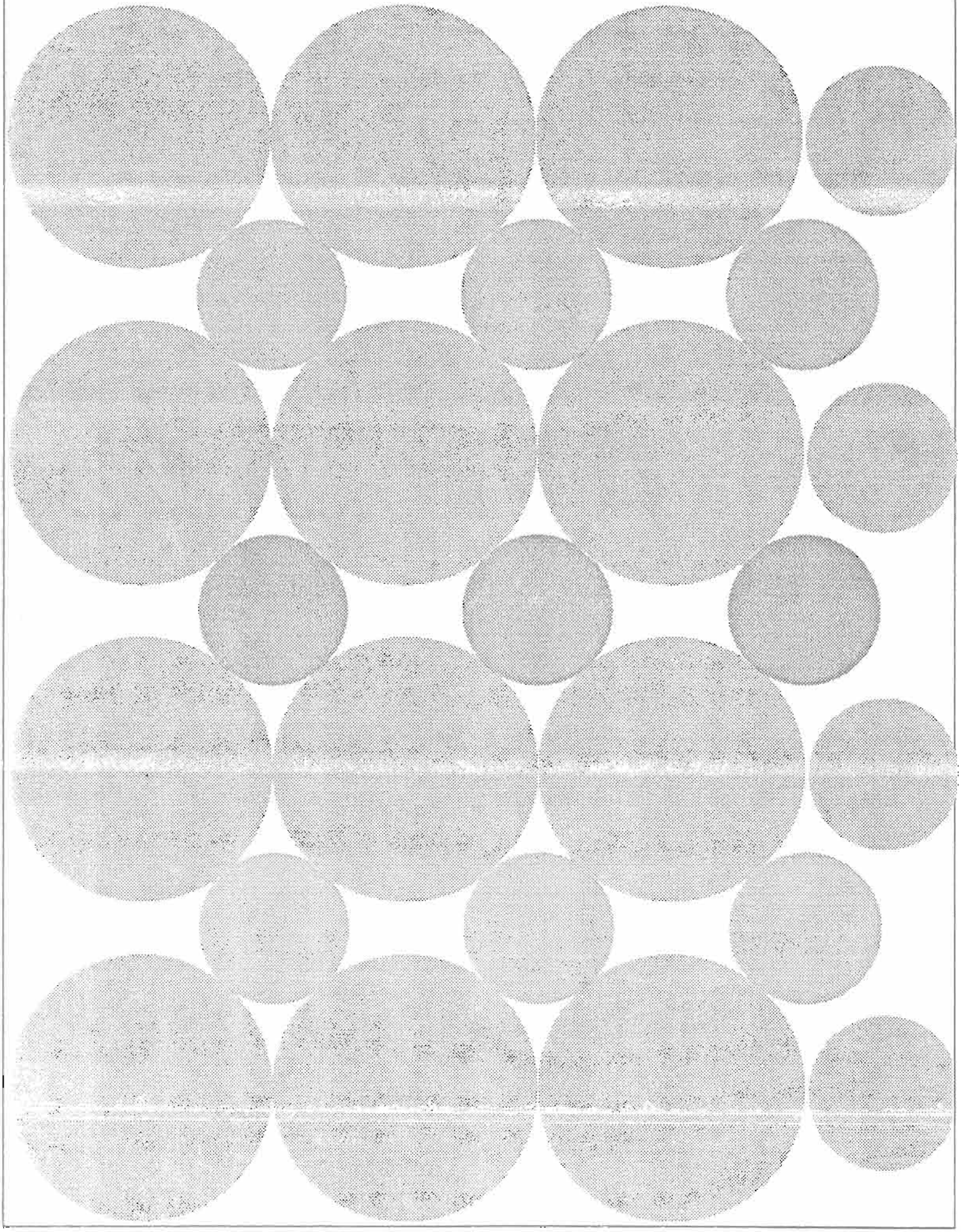
Los casos de más de tres círculos no se analizan en este trabajo, pero el lector interesado lo podrá hacer tomando en cuenta todo el análisis anterior.

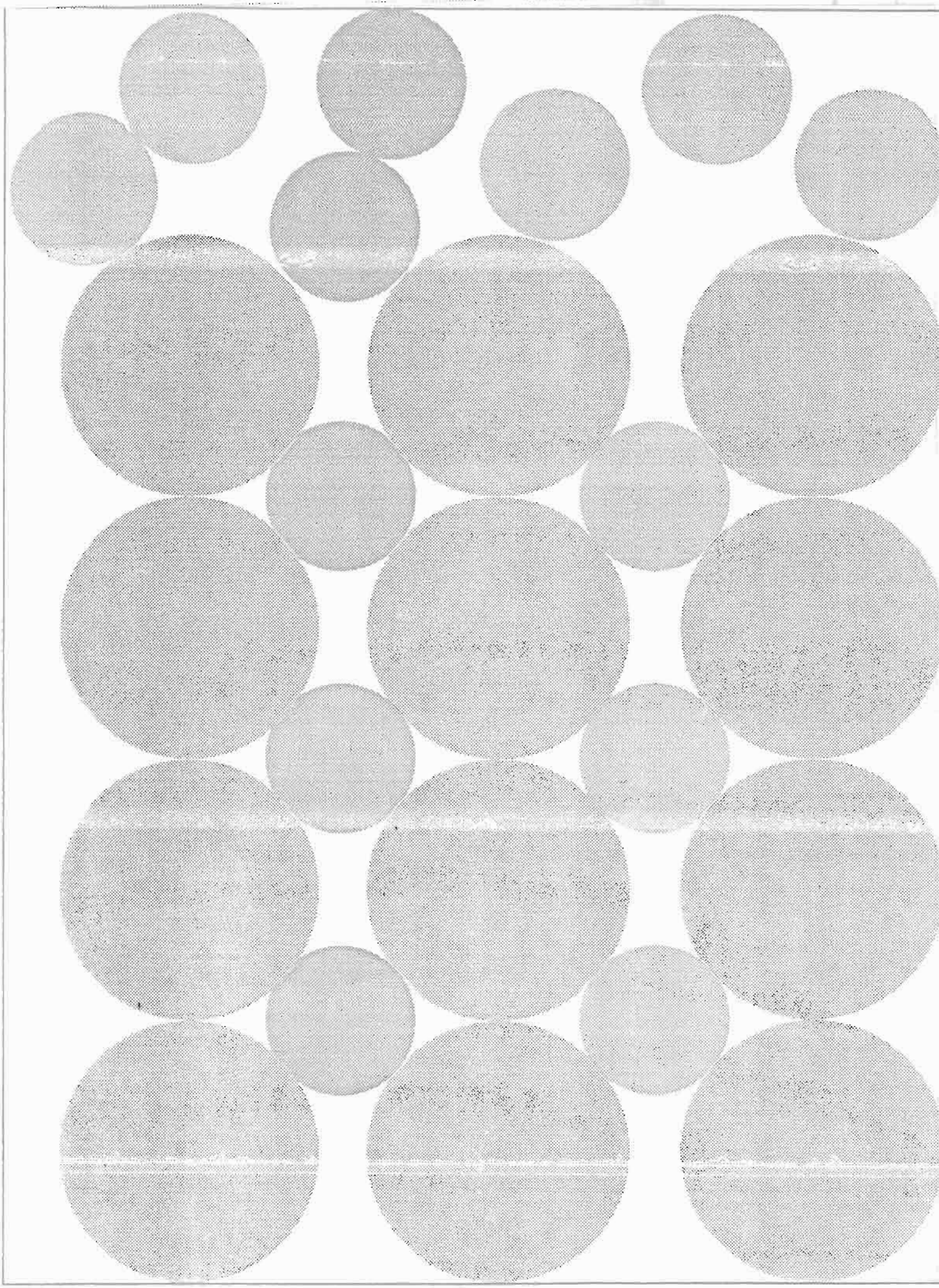
Aplicaciones.

1. Si se consideran las hojas (rectangulares) para obtener la base de los pasteles,los cuales son de diferente diámetro, se puede hacer uso de esta metodología para minimizar el desperdicio.

2. En la industria metal-mecánica tomando en cuenta las planchas de hierro del espesor adecuado, se tienen que cortar círculos que nos proporcionen las tapas de los motores y las tapas de las bombas de agua, que de acuerdo a la capacidad del motor o la bomba es el diámetro de la tapa posterior que lleva cada uno de ellos. Utilizando el criterio de optimización de cortes se puede obtener un desperdicio mínimo lo cual reduciría los costos.







3. Se puede calcular también cómo hacer los cortes de tortillas para obtener el máximo número de ellas y minimizar el consumo de gas.

4. Se queda abierto para aplicaciones posteriores de acuerdo al interés y necesidades del usuario.

II. SEGUNDA PARTE.

En esta segunda parte consideramos cortes rectangulares como las cubiertas de los libros, libretas, blocks tamaño carta y oficio. Sin embargo, revisando la literatura encontramos en el libro de Investigación de Operaciones, que el autor Taha nos presenta la resolución de una problemática más general, la cual se ha adaptado al presente trabajo.

La problemática puede describirse como sigue: la fábrica de papel San Rafael, produce rollos de papel de 190 cm de ancho y desea cubrir pedidos con rollos de diversos anchos que nos representan toallas de mano, rollos de papel sanitario, el ancho de una página de periódico, etc. Los anchos varían a título ilustrativo de acuerdo a la siguiente tabla:

Ancho	Rollos pedidos
30 cm	1 500
70 cm	800
90 cm	500

Como la longitud de los rollos no es una restricción que pueda afectar el resultado del modelo, no se considera como limitante para efecto de los cortes. Los tipos de corte posibles con estas tres medidas son:

Corte tipo 1.

```
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|***| Desperdicio: 10 cm
 30   30   30   30   30   30   10
```

Corte tipo 2.

```
|-----|-----|-----|-----|---------------| Desperdicio: 0 cm
 30   30   30   30        70
```

Corte tipo 3.

```
|-----|-----|-----|-----------------|***| Desperdicio: 10 cm
 30   30   30        90          10
```

Corte tipo 4.

```
|-----|---------------|---------------|*****| Desperdicio: 20 cm
 30        70             70        20
```

Corte tipo 5.

```
|-----|-------------|----------------------| Desperdicio:  0 cm
 30        70                  90
```

Corte tipo 6.

```
|-----------------|-----------------|***| Desperdicio: 10 cm
        90                 90        10
```

De los tipos de corte no considerados sería por ejemplo:

```
|-------------|-------------|-----|*****| Desperdicio: 20 cm
     70            70         30   20
```

el cual ya fue considerado como corte tipo 4, todos los casos análogos se omiten. La siguiente tabla nos resume las posibilidades anteriores y nos proporciona la matriz de coeficientes técnicos del sistema, para obtener el modelo matemático, en donde cada elemento de la matriz nos representa la contribución en número de rollos por tipo de corte.

Ancho	Tipo de corte						Rollos pedidos
	1	2	3	4	5	6	
30 cm	6	4	3	1	1	0	1 500
70 cm	0	1	0	2	1	0	800
90 cm	0	0	1	0	1	2	500

El modelo matemático se obtiene si se definen las variables de decisión como:

X_j ≡ número de rollos que se cortan con el corte tipo j

Tomando en cuenta todos los tipos de cortes anteriores, se tendrían las siguientes igualdades:

cantidad de rollos 30 cm ancho = $6X_1 + 4X_2 + 3X_3 + X_4 + X_5$
cantidad de rollos 70 cm ancho = $X_2 + 2X_4 + X_5$
cantidad de rollos 90 cm ancho = $X_3 + X_5 + 2X_6$

MODELO MATEMÁTICO.

Definamos las variables Y_1, Y_2, Y_3 (variables de estado), como el número de rollos sobrantes de 30, 70 y 90 cm de ancho respectivamente, el modelo será:

$$
\begin{aligned}
\min Z &= 10X_1 + 10X_3 + 20X_4 + 10X_6 \\
\text{s.a.}\quad & 6X_1 + 4X_2 + 3X_3 + X_4 + X_5 - Y_1 = 1500 \\
& X_2 + 2X_4 + X_5 - Y_2 = 800 \\
& X_3 + X_5 + 2X_6 - Y_3 = 500
\end{aligned}
$$

$$Xj \geq 0,\ j = 1 \ldots 6,\ Xj \in Z$$

$$Yi \geq 0,\ i = 1 \ldots 3$$

en donde la función objetivo, es minimizar el desperdicio de cada tipo de corte sujeto a cumplir las demandas del pedido para cada ancho deseado.

La resolución de este tipo de problemas es vía programación entera.

CONCLUSIONES.

Del análisis de ambos casos y dada la importancia de optimizar los recursos, es relevante considerar que el utilizar este tipo de técnicas nos ayuda a planificar una mayor producción tomando en cuenta las restricciones de nuestra problemática; esperamos haber contribuido en ello con el presente trabajo.

AGRADECIMIENTOS.

Debo agradecer a la Universidad La Salle el haberme dado todas la facilidades para realizar esta pequeña investigación y especialmente al Centro de Investigación y a la Escuela de Ingeniería.