CONTROL DE UN SISTEMA NO LINEAL DE SEGUNDO ORDEN EN RÉGIMEN CAÓTICO

Julio. E. Lago-Canosa; Pedro C. Estrada-Gutiérrez y Hugo G. González Hernández

RESUMEN

En la actualidad, el estudio de sistemas no lineales ha ido aumentando a partir del descubrimiento del fenómeno de caos. Recientes trabajos demuestran la presencia de este fenómeno en sistemas muy sencillos. En algunos casos, se requiere que el comportamiento caótico de un sistema sea regulable, convergiendo a un punto fijo o que se comporte como otro sistema siguiendo una trayectoria específica. En el presente trabajo se muestra el control para un sistema no lineal de segundo orden en régimen caótico, regulando la salida alrededor de un punto fijo con acciones pequeñas de control sobre un conjunto de parámetros accesibles. El sistema caótico a controlar es el mapeo de Hénon y la técnica de control empleada es una retroalimentación no lineal de estado. Se presenta una comparación entre retroalimentación lineal y retroalimentación no lineal del estado. También se presentan resultados computacionales y una implementación electrónica del sistema y el control.

INTRODUCCIÓN

Un sistema caótico es un sistema determinista que exhibe un comportamiento aparentemente aleatorio. El fenómeno caótico se ha reportado en diferentes disciplinas como astronomía, biología, ingeniería y varias otras. Una de las principales características de un sistema caótico es que puede describir una dinámica compleja con pocas ecuaciones no lineales determinísticas. Estas ecuaciones, que pueden tener una estructura simple, pueden ser usadas como modelos para predecir comportamientos complicados.

En algunas áreas de la ingeniería, la dinámica caótica debe ser evitada en el diseño. De aquí que sea importante el estudio de procedimientos para controlar sistemas caóticos (ya sea para producirlo o para eliminarlo). Por ejemplo, Vincent & Yu en 1991 [1] han aplicado diferentes leyes de control a las ecuaciones de Lorenz [2]. El objetivo es convertir el comportamiento en estado estable de un movimiento caótico a un punto de equilibrio. La dinámica de las ecuaciones de Hénon es muy compleja y ha sido estudiada desde hace ya varios años; sin embargo sus propiedades de control no han sido analizadas del todo. En la última década, el diseño de leyes de control por retroalimentación para sistemas no lineales ha experimentado un mayor desarrollo. Debido a la aplicación de conceptos matemáticos de la Geometría Diferencial, ha sido posible diseñar leyes de control que transforman un sistema no lineal en uno lineal. Estas técnicas han sido desarrolladas para sistemas continuos. En el presente trabajo se exponen dos técnicas, una lineal y otra no lineal, para el control de las ecuaciones de Hénon. Se presentan los resultados de la simulación en computadora y una implementación electrónica del sistema y el control.

DESARROLLO

La planta analizada es descrita por las siguientes ecuaciones [3]:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= A_0 - x_n^2 + By_n + P \\ y_{n+1} &= x_n \end{aligned} \qquad (1)$$

Para el régimen caótico se tienen $A_0 = 1.4$, $B = 0.3$.

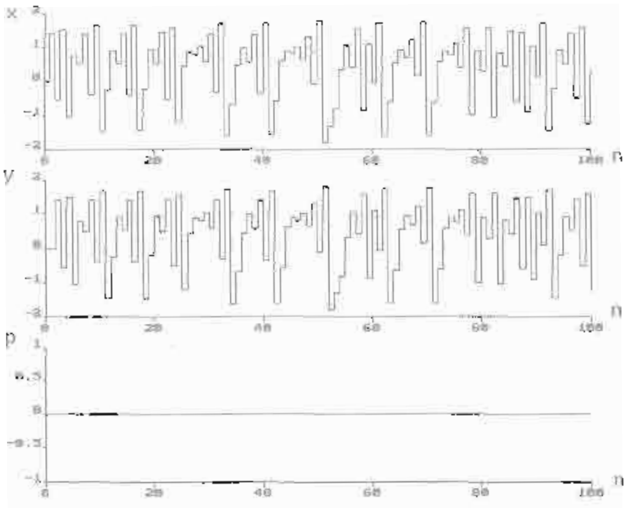

FIG 1 Sistema sin control

Lineal

Para este caso el sistema se linealiza alrededor de un punto fijo del sistema. Los puntos fijos del mapeo de Hénon se obtiene resolviendo las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x &= A_0 - x^2 + By \\ y &= x \end{aligned} \tag{2}$$

lo que da como resultado:

$$x_F = y_F = \begin{cases} 0.8839 \\ -1.5839 \end{cases} \tag{3}$$

linealizando el sistema se tiene:

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_F & B \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \tag{4}$$

el cual, se evalúa en los puntos fijos obtenidos (3) y se calculan sus valores propios:

λ_u = (-1.9237, -4.3926)
λ_s = (0.1599, 0.0920)

y vectores propios:

$$v_u = \begin{bmatrix} \lambda_u \\ 1 \end{bmatrix} c, \qquad v_s = \begin{bmatrix} \lambda_s \\ 1 \end{bmatrix} d,$$

con c,d $\in \Re$-{0}. En este caso se aplica un método de Geometría Diferencial desarrollado por A. Isidori [4]. A partir de los vectores propios se calculan vectores unitarios:

$$e_u = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_u^2}}\begin{bmatrix}\lambda_u \\ 1\end{bmatrix}, \qquad e_s = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_s^2}}\begin{bmatrix}\lambda_s \\ 1\end{bmatrix}$$

dados $x_0=(1, 0)^T$, $y_0=(0,1)^T$, entonces:

$$e_u = \frac{\lambda_u x_0 + y_0}{\sqrt{1+\lambda_u^2}}; \qquad e_s = \frac{\lambda_s x_0 + y_0}{\sqrt{1+\lambda_s^2}}$$

Posteriormente se definen f_S y f_U que son vectores de la base dual, es decir:

$$f_s \cdot e_s = f_u \cdot e_u = 1, \quad f_s \cdot e_u = f_u \cdot e = 0$$

Entonces:

$$f_u = \frac{\sqrt{1+\lambda_u^2}}{\lambda_s - \lambda_u}(x_0 - \lambda_s y_0) \qquad f_s = \frac{\sqrt{1+\lambda_s^2}}{\lambda_s - \lambda_u}(x_0 - \lambda_u y_0),$$

El control queda [5]:

$$u_n = C\,\xi_n$$

donde:

$$C = -\frac{\lambda_u(x_F + 1 - B)}{(1-\lambda_u)(1-\lambda_s)}\begin{bmatrix}1 & -\lambda_s\end{bmatrix}$$

y

$$\xi_n = \begin{bmatrix}x_n \\ y_n\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}x_F \\ y_F\end{bmatrix}$$

es decir:

$$C = \begin{bmatrix}1.2405 & -0.1983\end{bmatrix}$$

<u>Caso No Lineal:</u>

En el caso de que se pueda emplear una retroalimentación no lineal se tiene el control:

$$u_n = -A_0 + x_n^2 + r$$

el cual linealiza el sistema de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix}x_{n+1} \\ y_{n+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & B \\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_n \\ y_n\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}r$$

Este sistema se puede regular hacia un punto de equilibrio arbitrario solo moviendo la referencia r constante. Para seguimiento de modelo no se puede emplear este método ni algún otro.

Caso Lineal

En la siguiente figura se muestra el sistema con control:

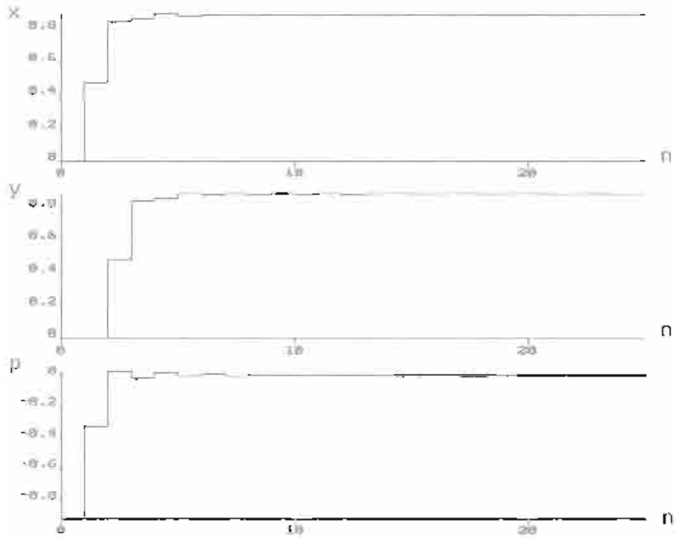

FIG. 2 Sistema con control lineal

Como se observa de la figura 2 el sistema se regula alrededor del punto de equilibrio llegando aproximadamente en 8 unidades de tiempo. A fin de analizar los transitorios simulamos el sistema para una señal de control acotada. En la Fig. 3 se muestra el sistema con un control $P\in[-0.01, 0.01]$.

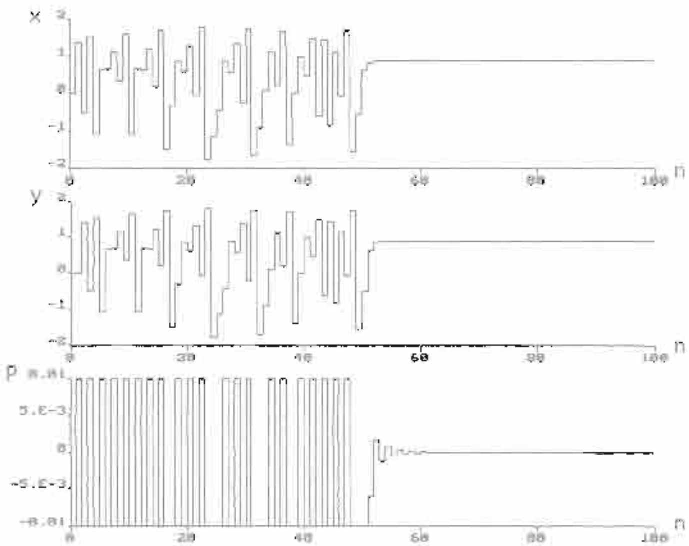

FIG. 3 Sistema con control acotado $P \in [-0.01, 0.01]$

Se puede observar de esta última gráfica que existen transitorios caóticos cuando la señal de control es acotada. En algunos casos es necesario acotar el control ya que puede ser demasiado violento o muy grande en magnitud.

Caso No Lineal

Para el caso No Lineal los resultados se muestran a continuación. Para el caso no lineal se tiene una convergencia ligeramente más lenta para el sistema sin acotar la señal de control (Fig. 4). En la figura 5 se muestra la respuesta del sistema ante una señal acotada P ∈ [-0.01, 0.01].

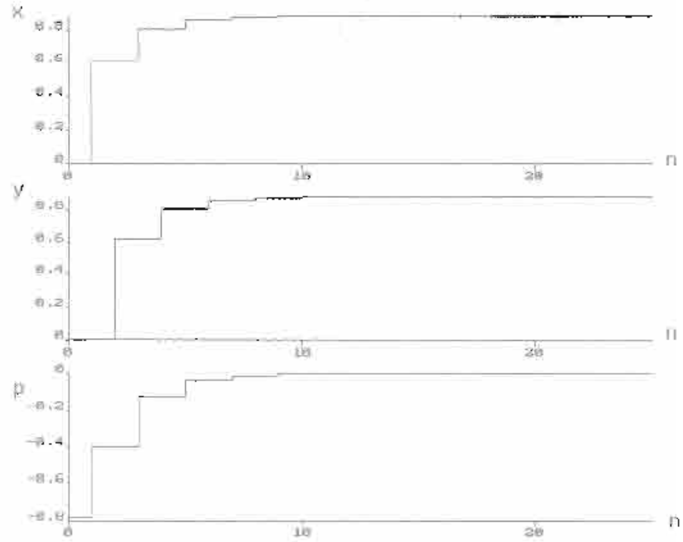

FIG. 4 Sistema con control no lineal

Se puede apreciar que cuando se acota la señal de control es considerablemente más lenta la convergencia hacia el punto fijo.

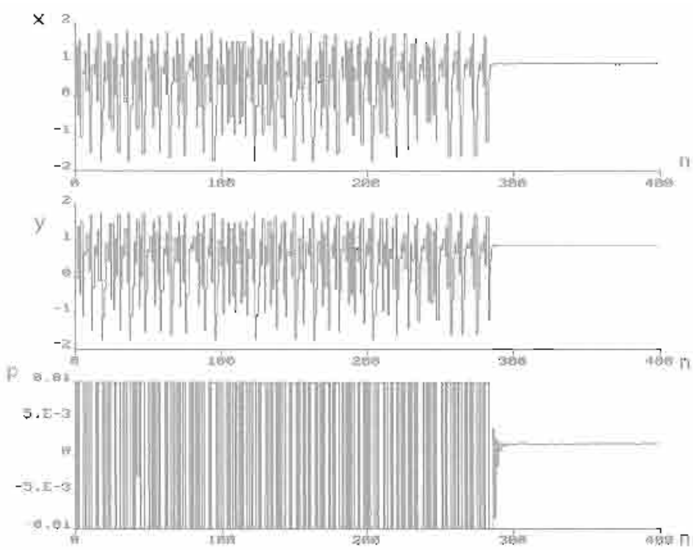

FIG. 5 Sistema con control No Lineal acotado P∈ [-0.01, 0.01]

Implementación Electrónica

Para la implementación electrónica del sistema y del control se empleó un circuito basado en un multiplicador analógico AD533 [6] para elevar la señal al cuadrado conectado a Amplificadores Operacionales para dar las ganancias respectivas [7].

En la figura 6 se muestra el sistema en régimen caótico. La figura 7 podemos observar un comportamiento periódico de período 3 asegurando que el sistema implementado es caótico [8]. Finalmente se muestra el sistema controlado por una señal acotada (Fig. 8)

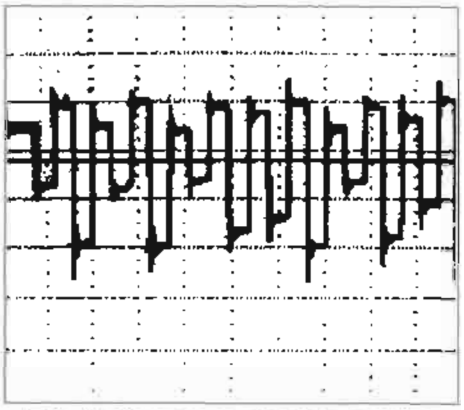

FIG. 6 Sistema en régimen caótico

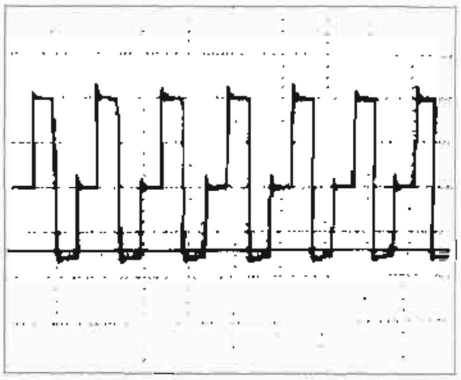

FIG. 7 Sistema en régimen periódico de período-3

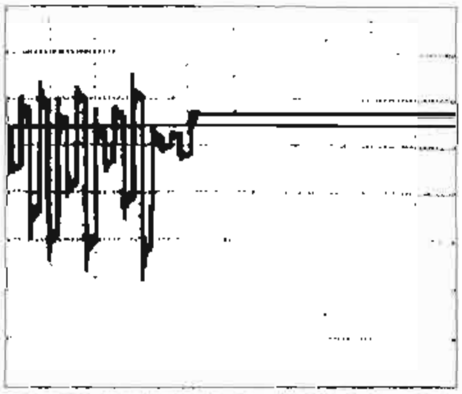

FIG. 8 Sistema controlado con límites de acotamiento

CONCLUSIONES

El control de sistemas caóticos es necesario en algunos casos. En este trabajo se mostraron dos formas sencillas de controlar un sistema no lineal discreto, en general, no es sencillo controlar un sistema caótico, específicamente si se puede añadir una entrada de control al sistema, en este caso es muy probable que se puede implementar un control para regular hacia una referencia o al punto de equilibrio. A partir de los resultados obtenidos se puede notar que con un control lineal sólo se puede regular alrededor del punto de equilibrio del sistema linealizado, mientras que utilizando un control no lineal es posible regular alrededor de una referencia deseada. En las referencias consultadas no aparece el control de un sistema caótico alrededor de una trayectoria, éste aún es, al parecer, un problema abierto.

REFERENCIAS

[1] Vincent, T.L. & Yu, J. (1991). "Control of a chaotic system." Dynamics and Control, vol. 1, nv. 1, pp. 35-52.

[2] Hartley, T.T. & Mossayebi, F. (1992). "Classical control of a chaotic system." First IEEE Conference on Control Applications, Dayton, Ohio, USA. pp. 522-526.

[3] Hénon, M. (1982). On the numerical computation of Poincaré Maps. Physica 5D, 412.

[4] Isidori A. (1987). Lectures on Non-Linear Control, Notes prepared for a Course at the Carl Cranz Gessellschaft (3-6 August, 1987).

[5] Alvarez Gallegos J. (1993). Introducción a Sistemas Caóticos. Apuntes del curso. Publicación interna. CONVESTAV-IPN.

[6] González-Hernández, H. (1992). El desarrollo y estudio de sistemas caóticos. III Congreso Internacional de Electrónica y Comunicaciones CONIELECOM `92. Universidad de las Américas, Puebla. 17-20 de Febrero.

[7] Estrada Gutiérrez P. & Lago Canosa J. E. (1993). "Control de un sistema no lineal discreto". I Jornadas de Investigación ULSA. Universidad La Salle. Noviembre de 1993.

[8] Li, T. Y. & Yorke, J. A. (1975). "Period three implies chaos." Am. Math. Monthly 82, 985.