



## SUAVIZACIÓN DE TRAYECTORIAS PARA VEHÍCULOS AUTOGUIADOS

Hugo G. González-Hernández y M. Farías-Elinos.  
Centro de Investigación, Universidad La Salle

### RESUMEN

Existen varias aproximaciones para la planeación de vehículos autoguiados, uno de ellos es la aproximación del mapa de carreteras. Este método consiste en encontrar todos los caminos posibles evitando los obstáculos del lugar. La selección del camino no tiene continuidad en la primera derivada, esto significa que hay puntos en el camino donde la primera derivada no existe. Para evitar este problema nosotros aproximamos el camino utilizando *B-splines*. La trayectoria resultante tiene la primera derivada continua en todos los puntos del camino.

### ABSTRACT

There are many approaches to path planning for autoguided vehicles, one of them is the Roadmap approach. This method consists on finding all possible paths avoiding obstacles in a room. The chosen path often has not continuous first derivative, this means that there are points in the path where the first derivative does not exist. To avoid this problem we approximate the path using *B-splines*. The resulting trajectory has continuous first derivatives in all points of the path.

### INTRODUCCIÓN

Los *B-splines* cúbicos son una clase de función de curvas definidas sobre intervalos discretos, donde cada coordenada de la primera y segunda derivada son continuas sobre el segmento de la curva y sobre los nodos de control que son parte de la curva. El segmento de la curva es calculado a partir del conjunto de puntos que son los vértices del polígono característico de la curva. Los puntos del polígono dependen de la selección de los puntos, la localización de los vértices del polígono característico pueden encontrarse por iteraciones del algoritmo de Yamagushi [1] o por el algoritmo de solución matricial de Barsky y Greenberg [2].

Después de dar la curva como entrada, la primera estrategia es definir los puntos nodos sobre la curva. La distancia entre estos puntos no necesariamente debe ser igual. Se han propuesto varios métodos para definir los puntos nodos y para la construcción de la curva. Shirai [3] propone calcular el ángulo entre las líneas  $P_{i-1}P_i$  y  $P_iP_{i+1}$ . Todos los puntos  $P_i$  para los cuales este ángulo es menor que algunos valores de umbral son eliminados. Este método puede guardar pocos puntos para una parte recta de la línea, pero guarda muchos para una curvatura constante. El código de cadena utiliza la técnica de seguimiento de puntos vecinos en una de las ocho direcciones discretas.

Ninguno de los métodos mencionados anteriormente da una selección de puntos suficientes para preservar la forma general y local de la curva a reproducirse como se requiere en este problema. El algoritmo descrito en este trabajo fue concebido a partir de ideas de Brice y Fennema[4], y Guzman[5].

Teniendo los puntos nodo, pueden ser usadas varias clases de *splines* y otras curvas. El *B-spline* cúbico es usado a menudo para representar curvas, en nuestro caso, aproximaremos un conjunto de puntos mediante una curva seccionalmente polinómica.



## DETECCIÓN DE PUNTOS NODOS

Para poder suavizar la trayectoria es necesario llevar a cabo primero una detección de esquinas o nodos. Esto es esencial para la descripción de curvas planas que será utilizado para representar la trayectoria. La definición de esquina es relativa pero podemos entenderla como una discontinuidad. Con esta percepción en mente podemos identificar una gran cantidad de esquinas en la trayectoria a suavizar. Mientras una función polinomial a pedazos como un *B-spline* es suficientemente flexible para tener una cúspide aguda, el comportamiento de la curva cerca de la cúspide es muy forzada, por eso trataremos de no modelar esas esquinas con cúspides. Con la suposición de que las terminaciones de las curvas son esquinas, nuestro método es tratar cada segmento de curva entre pares adyacentes de esquinas como una curva elemental a ser ajustada y representada por una función *B-spline* con la condición de que el punto terminal sea interpolado. Esto asegura que las curvas reconstruidas sean continuas en las posiciones de las esquinas.

Se ha adoptado un método convencional [6] para detectar esquinas de una curva para facilitar el proceso de la aproximación por B-splines, este método se describe a continuación:

Considere un segmento de curva con  $n+1$  puntos digitalizados  $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ , como los puntos terminales  $(x_0, y_0)$  y  $(x_n, y_n)$  se suponen esquinas ( la curvatura en estos puntos se fija en cero), trataremos de encontrar otras esquinas a partir de los puntos  $(x_i, y_i)$  para  $i=1,2,\dots,n-1$ . En cada uno de estos puntos, la curvatura digital es evaluada de la siguiente forma:

$$C_i = \frac{A_i \cdot B_i}{|A_i||B_i|}$$

donde:

$$A_i = (x_{i+j} - x_i, y_{i+j} - y_i)$$

$$B_i = (x_{i-j} - x_i, y_{i-j} - y_i)$$

con  $i+j = n$  en caso de que  $i+j > n$  e  $i-j = 0$  en caso de que  $i-j < 0$ . En este caso “ $\cdot$ ” denota el producto interno de los vectores y  $|X|$  denota la longitud o norma euclidiana del vector  $X$ . Si  $C_i$ ,  $i=1,2,\dots,n-1$ , es un máximo de  $C_k$ , para  $i-j \leq k \leq i+j$  con  $C_i > -C_2$ , tomamos el punto  $(x_i, y_i)$  como una esquina. Se fijan experimentalmente las constantes  $j = 3$ ,  $j_2 = 4$  y  $C_2 = 0.5$ .

## INTERPOLACIÓN DE LA CURVA

Para realizar la interpolación de la curva con *B-splines* de los puntos nodo y entre los pares de esquinas detectadas en la sección pasada utilizamos una aproximación tomada de Lozover y Preiss [7] la cual fue originalmente propuesta por Yamaguchi [8]. Aquí un conjunto de vértices de control se calcula a partir de un conjunto de nodos para definir la curva *B-spline* que pasa por los nodos entre cada par de esquinas adyacentes. Dado un conjunto de  $m+1$  vértices de control  $V_i$ , donde  $i=0,1,\dots,m$ , una curva *B-spline*  $Q(u)$  es definida seccionalmente como:

$$Q_i(u) = \sum_{r=i-1}^i V_{r+1} b_r(u), \quad u \in [0,1], \quad i=1,\dots,m-2 \quad (2)$$

donde las funciones *B-spline* base  $b_i(u)$  son:

$$\begin{aligned} b_{-1}(u) &= \frac{1-3u+3u^2-u^3}{6} \\ b_0(u) &= \frac{4-6u^2+3u^3}{6} \\ b_1(u) &= \frac{1+3u+3u^2-3u^3}{6} \\ b_2(u) &= \frac{u^3}{6} \end{aligned} \tag{3}$$

Denotamos todos los puntos nodo obtenidos en la sección anterior como  $P_i$ ,  $i=1, \dots, m-1$  para el *B-spline* cúbico. Para llevar a cabo la interpolación de estos puntos los compararemos con los puntos terminales de los segmentos de curva  $Q_i(u)$ ,  $i=1, \dots, m-2$ .

$$\begin{aligned} Q_i(0) &= P_i, \quad i = 1, \dots, m-2 \\ Q_{m-2}(1) &= P_{m-1} \end{aligned}$$

dándonos un conjunto de ecuaciones lineales para los vértices de control *B-splines*:

$$V_{i-1} + 4V_i + V_{i+1} = 6P_i, \quad i = 1, \dots, m-2 \tag{6}$$

para completar el conjunto de ecuaciones se determinan las siguientes condiciones arbitrariamente para asegurar que la curvatura es cero en los extremos de la curva:

$$V_0 = V_1 \quad \text{y} \quad V_m = V_{m-1}$$

La matriz de ecuaciones resultante es diagonalmente dominante, y puede ser resuelta por métodos numéricos convencionales.

## APROXIMACIÓN DE LA CURVA

Para aproximar una curva utilizando *B-splines* es necesario solamente considerar que los puntos esquina encontrados en una de las secciones anteriores son los vértices del polígono característico utilizados en la ecuación (2).

## SUAVIZACIÓN DE TRAYECTORIAS

Una imagen aérea de un recinto al momento de ser digitalizada generalmente tiene ruido o irregularidades debido al proceso de digitalización, para ello es necesario realizar varias operaciones de preprocesamiento, conocidas principalmente como filtros, los cuales se encargan de disminuir el ruido y tener una imagen nítida y confiable sobre la cual se pueda trabajar. Una vez realizado dicho filtrado la imagen es binarizada, bajo un umbral, quedando en negro los obstáculos que existen y en blanco el camino libre por donde se puede pasar el vehículo, para posteriormente obtener el mapa de carreteras o caminos posibles por donde puede pasar el vehículo.

Para la obtención de dicho mapa de carreteras se recurre a las técnicas de engrosamiento de objetos, esqueletización, concatenación, podado y obtención del mejor camino para llegar de un punto inicial a



un punto final. Antes de la obtención del mapa de carreteras es necesario dar un margen de seguridad al paso del vehículo, para lo cual los obstáculos son engrosados o dilatados utilizando el radio de un círculo que circunscribe al vehículo como parámetro.

Para la obtención del mapa de carreteras se utiliza la esqueletización, por medio de la cual se tiene una representación de las áreas libres del recinto, cuyo grosor no es mayor a la de un pixel, a esto se le conoce como el esqueleto, en el cual cada rama representa un posible camino por donde puede pasar un vehículo. Posteriormente a este esqueleto se le unen los puntos de inicio y final de la trayectoria del vehículo. El siguiente paso a realizar es el podado o borrado de las ramas que no son útiles dentro del recorrido del robot. La figura 1 muestra el mapa de carreteras para un caso de prueba.

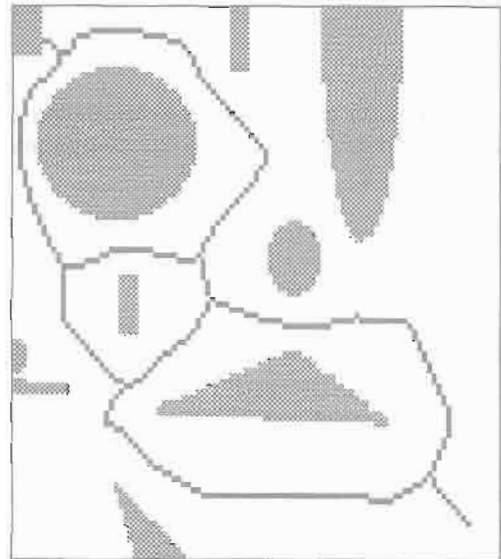
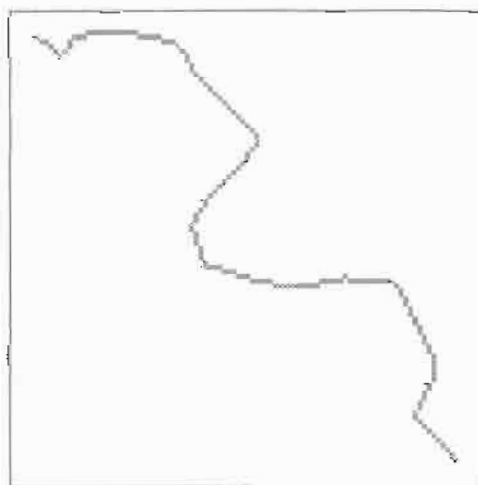
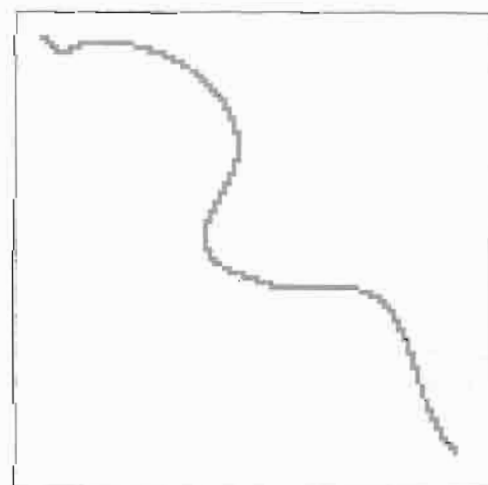


FIG.1 Mapa de Carreteras.

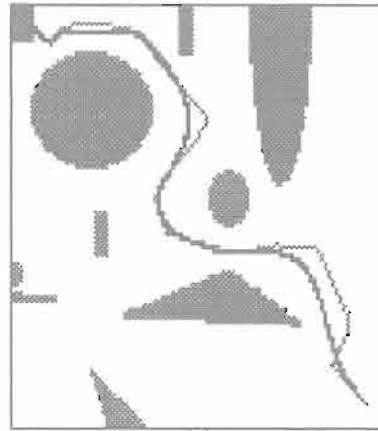
Una vez obtenido el mapa de carreteras con los caminos posibles por donde puede pasar el vehículo desde su punto de inicio hasta su punto final, se entra en una etapa de optimización de la trayectoria, la cual consiste en obtener la mejor ruta por donde puede ir el vehículo desde su punto de inicio hasta el punto final de la trayectoria sin ningún problema; para dicha optimización se toma en cuenta el ancho mínimo del camino, la longitud mínima y el ancho promedio [9]. Por último se suaviza la trayectoria obtenida.



(a)



(b)



(c)

FIG. 2. (a) Trayectoria sin suavizar, (b) trayectoria suavizada, (c) ambas trayectorias.

## REFERENCIAS

1. Yamaguchi, F. "A new curve fitting method using a CRT computer display". *Computational Graphics and Image Processing*. Vol. 7, pp. 425-437 (1978).
2. Barski, B.A. y Greenberg, D.P. Determining a set of B-spline control vertices to generate an interpolating surface. *Computational Graphics and Image Processing*. Vol. 14, pp.203-226 (1980).
3. Shirai, J. "A hierarchical program for recognition of polyhedra. *Bull. Electrotechnic Laboratory of Japan*. Vol. 36, pp. 655-672 (1972).
4. Brice, C.R. y Fennema, C.L. "Scene analysis using regions". *Artificial Intelligence*. Vol. 1, pp. 205-226. (1970).
5. Guzman, A. "Analysis of curved line drawings using context and global information". *Machine Intelligence*. Vol. 7, pp.325-375 (1972).
6. Sekita, I.; Toraichi, K.; Mori, R; Yamamoto, A. y Yamada, H. "Feature extraction of handwritten japenese characteres by spline functions for relaxation matching". *Pattern Recognition*, Vol. 21, pp. 9-17 (1988).
7. Lozover, O y Preiss, K. "Automatic construction of a cubic B-spline representation for a general curve". *Computational Graphics*, Vol. 7(2), pp.149-153. (1983).
8. Yamaguchi, F. "Curves and surfaces in computer aided geometric design". *Springer*, Berlin. (1988).
9. Ibarra-Zannatha, J.M.; Sossa-Azuela, J.H. y González-Hernández, H.G. " A new Roadmap approach to automatic path planning for mobile robot navigation". *1994 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, San Antonio TX. Octubre, 2-5, 1994.



## CENTRO INTERNACIONAL DE EDUCACION, LA SALLE

### CIEL

#### OFRECE LOS SIGUIENTES SERVICIOS:

- ✓ **Información Educativa:** Brinda información sobre fuentes de financiamiento para hacer Maestrías y/o Doctorados en universidades internacionales.
- ✓ **Asesoría académica para estudios en el extranjero.**
- ✓ **Intercambio Académico:** La ULSA tiene acuerdos con las siguientes universidades: la Universidad de Arizona en Tucson, Arizona; la Universidad de St. Mary's en Halifax, Canadá; el College of Santa Fe en México; la Universidad La Salle en Philadelphia, Pennsylvania; el Instituto Comercial de Nancy, Francia; el Groupe Ecole des Hautes Etudes Commercial du Nord en Lille, Francia; y un consorcio de 10 universidades en los Estados Unidos y Canadá en el área de Administración de Empresas. Asimismo estamos finalizando los trámites de membresía en el consorcio ISEP (Programa de Intercambio de Estudiantes Extranjeros) con más de 50 universidades.
- ✓ **Coordinación del "Programa Académico para Extranjeros".**
- ✓ **Relaciones con académicos de universidades extranjeras.**
- ✓ **Encuentros y Conferencias.**
- ✓ **Convenios.**



## IDENTIFICACIÓN DE LOS PARÁMETROS DE UN SISTEMA DINÁMICO UTILIZANDO UNA SEÑAL CAÓTICA EN EL REGRESOR.

Hugo G. González-Hernández, María del Carmen Lule Carpinteyro y Pedro Estrada Gutiérrez  
Centro de Investigación, Universidad La Salle.

### RESUMEN

Para aplicar métodos de gradiente y mínimos cuadrados en la estimación de parámetros es necesario que las señales medibles o generables del regresor sean de excitación persistente, es decir, que tengan suficiente cantidad de frecuencias para excitar todos los modos de respuesta del sistema a identificar. Tanto el ruido blanco como la señal caótica son señales de excitación persistente. En este trabajo se presenta una comparación de estas dos señales usándolas como parte del regresor para la identificación de los parámetros de un sistema dinámico.

### ABSTRACT

To apply least-square and gradient algorithms for parameter estimation, the input and measurable signals in the parameterization are needed to be of persistent excitation; this means that these signals are capable to stimulate all system modes. This could be possible if signals have enough number of frequencies. White noise and chaotic signals are of persistent excitation. The current studies, shows a comparison of both signals in the regresor (input and output signals) to identify system parameters.

### INTRODUCCIÓN

El concepto de modelo matemático es fundamental en ingeniería y en otras disciplinas. Un modelo se puede obtener por razonamientos físicos o analizando datos experimentales del sistema. En este último caso, la habilidad para obtener un modelo preciso es limitada por la presencia de fluctuaciones aleatorias tales como perturbaciones no medidas y errores de medición. El propósito de estudio de la Identificación de parámetros es precisamente el de obtener modelos matemáticos a partir de observaciones ruidosas del sistema. Las técnicas desarrolladas para llevar a cabo esta identificación son muchas y muy variadas [1], algoritmos de Mínimos Cuadrados, algoritmos Gradiente, algoritmos de Máximo de Verosimilitud, etc. Todas ellas requieren de una parametrización previa del sistema, posterior a esta parametrización se puede aplicar cualquiera de estos métodos. Para excitar todos los modos del sistema se requiere que la entrada sea de excitación persistente, es decir, que contenga suficientes frecuencias para identificar los parámetros del sistema. Una señal caótica es una señal de excitación persistente [2]. En este trabajo se muestra la identificación de los parámetros de un sistema eléctrico mediante un algoritmo Gradiente y empleando primero una señal de ruido blanco y posteriormente una señal caótica en el regresor. Se comparan resultados y se concluye a partir de éstos.



## DESCRIPCIÓN DE LA PLANTA E IDENTIFICACIÓN

Considérese la planta mostrada en la figura 1:

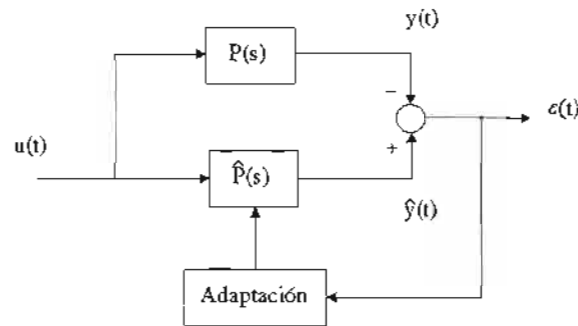


FIG. 1 Planta

para  $P(s)$  estable y  $u(t)$  seccionalmente continua.

Sea:

$$y(t) = \varphi^T(t)\theta. \quad (1)$$

la parametrización de la planta  $P(s)$  donde  $\varphi^T(t)$  es el regresor y contiene la entrada y las funciones medibles necesarias par la identificación,  $\theta$ , es el vector de parámetros reales (desconocidos) de la planta. Se tiene:

$$\hat{y}(t) = \varphi^T(t)\hat{\theta}(t) \quad (2)$$

donde  $\hat{y}(t)$  es la variable a estimar, y el vector  $\hat{\theta}(t)$  contiene los parámetros estimados. Considérese la ecuación de error:

$$\varepsilon(t) = \hat{y}(t) - y(t) \quad (3)$$

El objetivo es obtener una ecuación que nos permita describir la evolución de los parámetros estimados de tal forma que se minimice un cierto índice de desempeño dado:

$$J = J(\varepsilon(t)) \quad (4)$$

Un algoritmo gradiente se puede expresar como:

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = -\gamma \frac{\partial J}{\partial \hat{\theta}(t)} \quad \gamma > 0 \quad (5)$$

Existen varios índices de desempeño a minimizar, de los cuales emplearemos el siguiente:

$$J(\varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon^2(t) \quad (6)$$

Se tiene que:

$$\frac{\partial J(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = \varepsilon(t)$$



y como

$$\varepsilon(t) = \varphi^T(t)\tilde{\theta}(t), \quad \tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta.$$

entonces:

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = -\gamma\varepsilon(t)\varphi(t) \quad (7)$$

para  $\gamma > 0$ .

El algoritmo es estable. La prueba de estabilidad se encuentra en la referencia [3].

En forma recursiva:

$$\hat{\theta}(t + \Delta t) = \hat{\theta}(t) + \Delta t[-\gamma\varepsilon(t)\varphi(t)] \quad (8)$$

## SIMULACIÓN

Para la simulación se empleó una planta de primer orden de la forma:

$$y(t) = \frac{b}{s+a}u(t) + d(t)$$

con  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $d(t)$  = ruido blanco con media cero y dispersión 0.1. El ruido blanco modela errores de medición.

Parametrización:

$$\dot{y} = -ay + bu = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y \\ u \end{bmatrix}$$

la variable a estimar está dada por:

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} \hat{a} & \hat{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y \\ u \end{bmatrix} = \hat{\theta}^T(t)\varphi(t)$$

De esta forma, la aplicación del algoritmo (7) desarrollado es directa. Podemos observar que el regresor está formado por una señal generable  $u$  y una señal medible  $y$ .

A continuación se muestra la simulación usando diferentes señales para  $u$ . En la figura 2 se muestra la evolución de los parámetros para una entrada de ruido blanco con media cero y dispersión de 0.1.

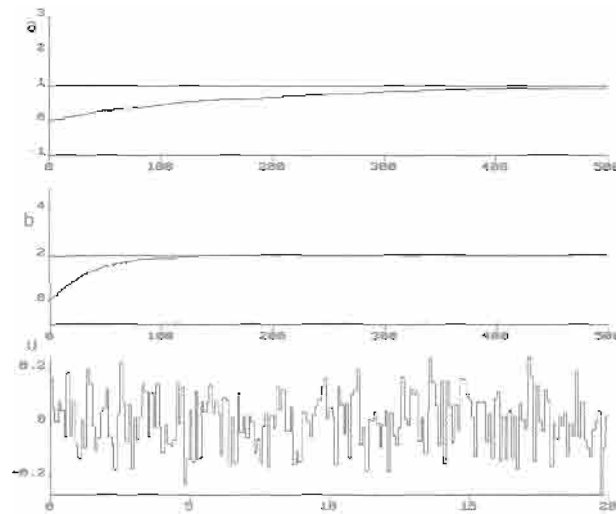


FIG. 2 Identificación de parámetros utilizando una señal de ruido blanco en el regresor.

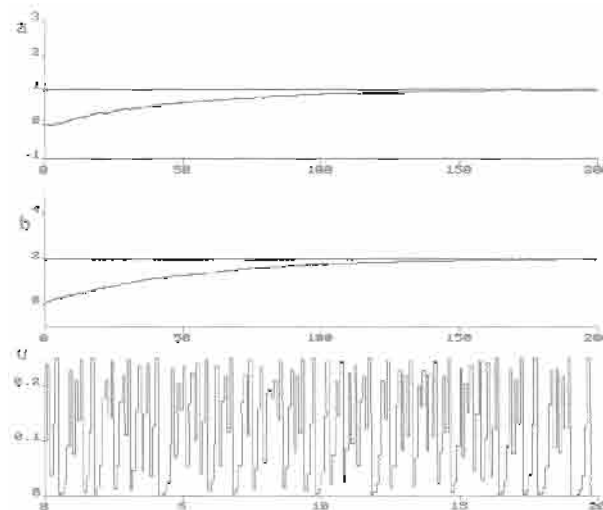


FIG. 3 Identificación de parámetros empleando una señal caótica en el regresor.

En la figura 3 se muestra una simulación para el mismo sistema, ahora empleando una señal caótica en el regresor. La señal caótica es producida por el Mapeo de May [4] descrito por:

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - \mu x_n) \quad (9)$$

Para el régimen caótico  $\mu=4$ .

Comparando ambas simulaciones se puede observar claramente que la convergencia de los parámetros es considerablemente más rápida cuando se aplica una señal caótica en el regresor que cuando se aplica una señal aleatoria.

## CONCLUSIONES

Desde su descubrimiento y divulgación, el fenómeno caótico ha sido considerado como un fenómeno teórico, más que de otra índole; no se le había considerado como una herramienta. En este trabajo se utiliza el fenómeno caótico como una herramienta para la identificación de parámetros de un sistema.

Las señales caóticas dentro del regresor son aún más efectivas mientras más parámetros se tengan que identificar. Esto es debido a que se necesita una señal con más frecuencias mientras más parámetros existan en el sistema.

## REFERENCIAS

1. Narendra, K.S. & Annaswamy, A.M. *Stable Adaptive Systems*. Prentice Hall. New Jersey. (1989).
2. González-Hernández, H.G. Análisis por técnicas computacionales y electrónicas del comportamiento caótico. Seventh International Conference, Computers in Institutions of Education and Research. CU, UNAM, Octubre de 1991. (1991).
3. Sastri S. & Bodson, M. *Stability, convergence and robustness*. Prentice Hall. New Jersey. (1989).
4. May, R.M., Simple mathematical models with very complicated dynamics. Nature, 261, 459. (1976).



#### **AGRADECIMIENTOS**

EL **CIULSA** agradece la colaboración de las autoridades y de los apoyos que propiciaron la edición de la revista.

*DIRECTORIO ULSA*

**RECTOR**

Mtro. Lucio Tazzer De Schrijver

**VICERRECTOR ACADÉMICO**

Dr. Ambrosio Luna Salas

**VICERRECTOR DE FORMACIÓN**

Dr. Rafael Martínez Cervantes

*CENTRO DE INVESTIGACIÓN DE LA UNIVERSIDAD LA SALLE (CIULSA).*

**DIRECTORA**

Dra. Araceli Sánchez de Corral

**JEFE DE DESARROLLO DE PROYECTOS**

I.Q. Ma. Concepción Fortes Rivas

**JEFE DEL AREA CIENTÍFICO-TECNOLÓGICA**

Q.F.B. José Antonio García

**ASESOR DE INFORMÁTICA**

Raúl Medina Gómez

**SECRETARIA**

Sra. Elizabeth De La Mora Montes

*INVESTIGADORES*

Biol. Anna Paola Bellucci  
Lic. Consuelo Carranza  
M.en C. David Domínguez  
Mtro. Francisco Durán  
Ing. Túlío Espinosa  
Pedro C. Estrada  
M. en C. Eduardo Gómez  
Ing. Hugo G. González  
Dr. José de Jesús Herrera

Arq. Pedro Irigoyen  
M. en C. Marco A. Jiménez  
Lic. Benedicto Juárez  
Dr. Jorge A. Larriva  
Fis. Alberto Lima  
Ma. del Carmen Lule  
Lic. José Luis Mondragón  
Q. Irene Montalvo  
Q.F.B. Martha Mustre

Lic. German Martínez  
Ing. Manuel Gerardo Raggi  
Dr. Adrián Rondán  
Q.F.B. Guadalupe Solís  
I.Q. Julio Torres  
M. en C. Esther Vargas  
M.I. Fernando Vera

**REVISTA DEL CENTRO DE INVESTIGACIÓN,**  
publicación del Centro de Investigación  
de la Universidad La Salle

**Dirección:**

Dra. Araceli Sánchez de Corral

**Edición y Elaboración:**

José Antonio García

Raúl Medina Gómez

**Corrección y Estilo**

Mtro. Francisco Durán y Mtz.

**Distribución:**

Lic. Irma Rodríguez Vega

**Diseño Gráfico:**

D.G. José Antonio Herrasti Castro

**Fotografía**

Gerardo Oynik

**Correspondencia:**

Benjamín Franklin No. 47

Col Condesa,

Deleg. Cuauhtémoc México D.F. 06140

Tel. 728-0522

FAX 271-8585 / 272-27-10

Apdo. Postal 18969 y 18995

**E-mail:**

[jgarcia@sunulsa.ulsal.mx](mailto:jgarcia@sunulsa.ulsal.mx)

[rmedina@sunulsa.ulsal.mx](mailto:rmedina@sunulsa.ulsal.mx)

Esta publicación tiene un tiraje de 1000  
ejemplares y aparece semestralmente.

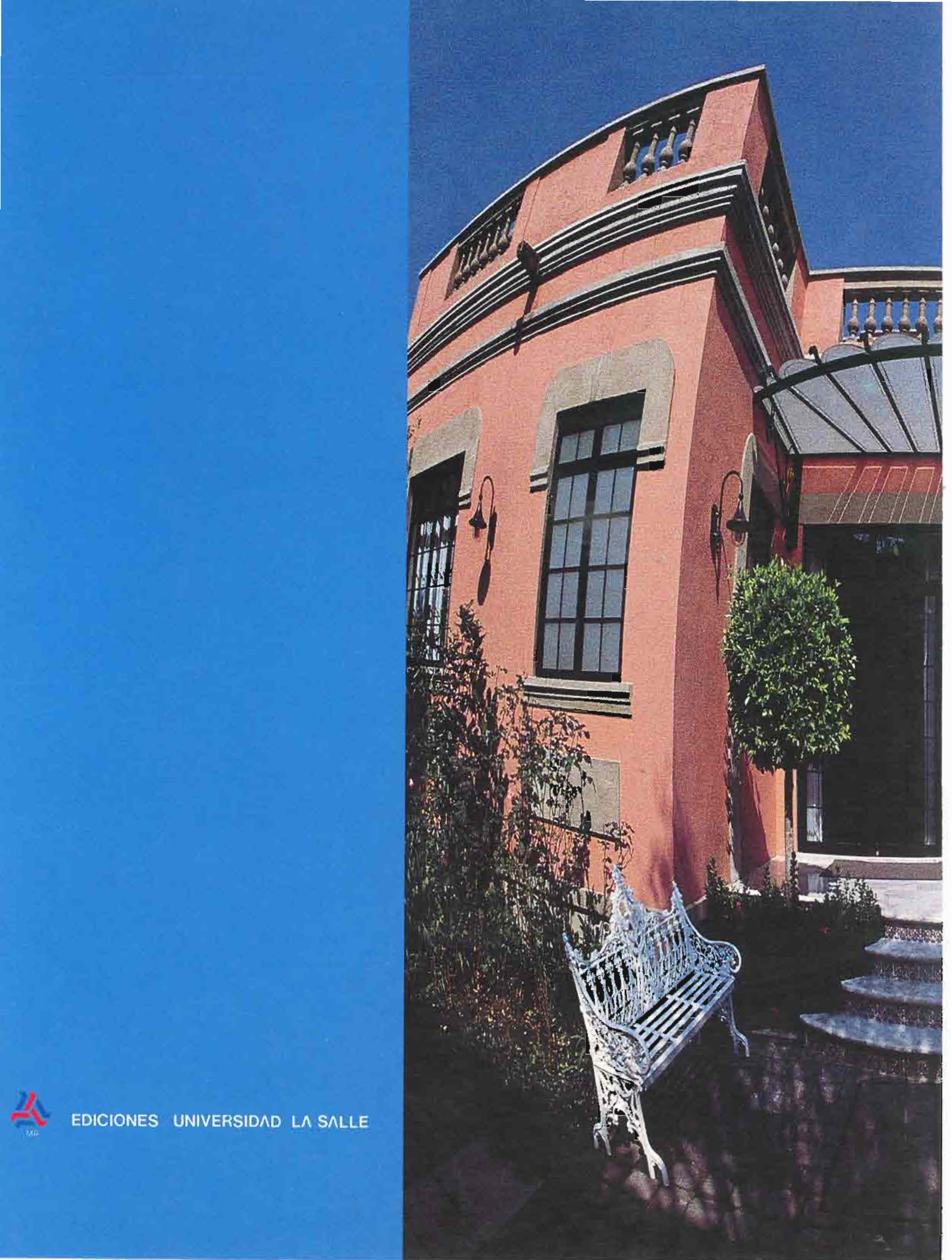
Impreso en Artes Gráficas Panorama  
con domicilio localizado en:

Calle Avena No. 629

Col. Granjas México, C.P. 08400

Reservados todos los derechos por el Centro de Investigación de la Universidad La Salle. Se autoriza la reproducción parcial o total de los artículos citando la fuente. Reserva para uso exclusivo del título, ante la Dirección General de Derechos de autor, certificado de licitud de título No. 7960, certificado de licitud de contenido No. 5638. ISSN: 1970-7960 Los artículos firmados son responsabilidad de los autores.





EDICIONES UNIVERSIDAD LA SALLE