

---

---

## SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE LA CINEMÁTICA INVERSA EN ROBÓTICA UTILIZANDO LÓGICA DIFUSA



Alejandro Eguiarte Salazar y Eduardo Gómez Ramírez  
Laboratorio del Centro de Investigación, Universidad La Salle

### RESUMEN

En algunos casos es de gran dificultad el encontrar una solución al problema de la cinemática inversa en robótica debido a las no-linealidades de su ecuación. Investigadores en todo el mundo han desarrollado diferentes alternativas para encontrar la solución óptima a este problema. Los últimos resultados reportados muestran el uso de Redes Neuronales Artificiales, Algoritmo Genético y Lógica Difusa para la solución de este problema. En este trabajo se presenta el diseño de un controlador utilizando lógica difusa para resolver el problema de la Cinemática Inversa, considerando únicamente la manera en que, inconscientemente, usamos nuestro brazo, antebrazo y muñeca para alcanzar algún objeto.

### ABSTRACT

Finding a solution to the Inverse Kinematics Problem (IKP) in Robotics is, sometimes a challenge difficult to face because of the inherent nonlinearities of its equations. Researchers of all the world have developed ways to find the optimal solution to this problem. Latest reports show the use of neural networks, genetic algorithms and fuzzy logic (to name a few), for the solution of this problem. In this paper we designed a Fuzzy Logic Controller to solve the IKP, considering only the logical manner we unconsciously use to move our upper arms, forearms and wrists to reach things.

### INTRODUCCIÓN

En la actualidad existe un creciente interés en la investigación y desarrollo de controladores que utilizan técnicas de inteligencia artificial para la determinación de sus diferentes salidas de control. La razón principal es por la versatilidad y confiabilidad que estos controladores pueden llegar a tener. Una de las técnicas utilizadas es la Lógica Difusa (LD). Algunas de las aplicaciones prácticas de la LD que existen en la actualidad son (1): controladores para el mecanismo de autoenfoco en cámaras de 8mm, frenos antibloqueo, sistemas de transmisión automática, controles de temperatura, humedad o nivel, etc.

Una de las razones principales del uso de la LD es que el algoritmo por naturaleza, permite procesar información de forma semejante al cerebro humano (2). Esta característica, desde el punto de vista de teoría de control, tiene varias ventajas: la primera y principal es que no se requiere del modelo matemático del sistema

a controlar. La segunda es que el diseño del control es simple, es decir, se requiere de menores herramientas matemáticas para el diseño de un controlador que por técnicas clásicas (3). Esta característica es importante debido a que diseñar un controlador que sea robusto y adaptable puede llegar a ser muy complejo. Una ventaja más que tienen los controladores difusos consiste en que es posible conocer exactamente su funcionamiento interno ya que la acción que ha de realizar el sistema difuso se encuentra descrita por un conjunto de reglas de inferencia, de manera que puede determinarse el estado del sistema en cada instante.

Uno de los problemas en Robótica en los cuales se ha utilizado LD y otra técnica llamada Redes Neuronales Artificiales (RNA), es el de la cinemática inversa de un manipulador. En este trabajo se presenta una alternativa a la solución de este problema utilizando LD, considerando la forma natural en que un humano toma un objeto. El artículo está estructurado de la siguiente forma: En la



primera parte se describe brevemente el problema de la cinemática directa e inversa utilizando técnicas tradicionales; en la segunda sección se definen las variables y funciones que se van utilizar para el control del manipulador, así como las reglas de inferencia. En la tercera sección se presentan algunas simulaciones para un manipulador de tres grados de libertad, y por último presentamos las conclusiones y perspectivas.

### EL PROBLEMA DE LA CINEMÁTICA DIRECTA

La posición de un manipulador o brazo de robot puede expresarse de dos formas: utilizando coordenadas cartesianas o bien coordenadas articulares. Las coordenadas cartesianas se establecen con respecto a los ejes coordenados mientras que las coordenadas articulares consideran cada articulación como un eje coordenado. En la práctica las consignas útiles para los dispositivos actuadores suelen ser consignas de posición en el espacio de coordenadas articulares. Por lo tanto, se requiere encontrar una transformación de un sistema de coordenadas a otro para relacionar estos dos espacios. Sea la transformación:

$$x = f(q) \quad \text{Ec.1}$$

donde  $x$  es un vector que representa la posición y orientación del órgano terminal en el espacio de coordenadas cartesianas, y  $q$  es un vector de posiciones articulares. La ecuación 1 es la formulación del problema de *Cinemática Directa* en el cual dadas las posiciones articulares  $q$ , se calcula la posición y orientación del órgano terminal del manipulador  $x$  en el espacio de coordenadas cartesianas. Es decir, el objetivo de la Cinemática Directa consiste en determinar el efecto total acumulado dado por las variables de unión, en este caso los ángulos de todos y cada uno de los eslabones. El problema de la Cinemática Directa tiene una solución simple. El procedimiento consiste en comenzar en la base de soporte del manipulador y sucesivamente calcular la posición y orientación de cada eslabón para determinar la posición y orientación del órgano terminal. En este procedimiento, a menudo se usan transformaciones homogéneas para especificar la posición y orientación de cada eslabón con

respecto a un sistema de coordenadas de referencia.

### EL PROBLEMA DE LA CINEMÁTICA INVERSA

El problema inverso al de la Cinemática Directa podemos definirlo como la función inversa de la ecuación 2 definida como:

$$q = g(x) = f^{-1}(x) \quad \text{Ec. 2}$$

la cual es la formulación del problema de la Cinemática Inversa, en el cual, dada la posición y orientación del órgano terminal o efector  $x$ , en el espacio de coordenadas cartesianas, se calculan las posiciones articulares  $q$  del manipulador.

El problema de la cinemática Inversa no es tan simple como el anterior, y como se sabe no existe una solución única para resolver este problema. Para simplificar esta solución, en el diseño de la mayoría de los manipuladores se toman en cuenta ciertos criterios como que los ejes de movimiento articular vecinos sean ortogonales o paralelos unos con otros, o bien que las primeras tres articulaciones sean las encargadas del posicionamiento espacial del órgano terminal, dejando que las tres últimas articulaciones formen una muñeca esférica, la cual será la encargada de la orientación del órgano terminal.

La solución de la Cinemática Inversa para el manipulador de 3 eslabones (3) puede obtenerse realizando una aproximación geométrica al problema, suponiendo un valor determinado para el ángulo  $\beta$  y calculando los otros dos de acuerdo a las siguientes ecuaciones que parten de la aplicación de la Ley de los Cosenos y otras consideraciones geométricas:

$$\cos \varphi = \frac{y_{03}^2 + z_{03}^2 - a^2 - b^2}{2ab} \quad \text{Ec. 3}$$

donde  $y_{03}$  y  $z_{03}$  son las coordenadas del origen del último sistema de coordenadas para el eslabón que contiene al efector. Transformando la ecuación anterior para poder obtener las dos soluciones se tiene que:

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{4a^2b^2}{\sqrt{(y_{03}^2 + z_{03}^2 - a^2 - b^2)^2 - 1}} \quad \text{Ec. 4}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{z_{03}}{y_{03}} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{b \operatorname{sen} \varphi}{a + b \cos \varphi} \right) \quad \text{Ec. 5}$$

donde:

$$\begin{aligned} y_{03} &= y - c \cos \beta'' \\ z_{03} &= z - c \operatorname{sen} \beta' \end{aligned} \quad \text{Ec. 6}$$

y el punto  $P$  de coordenadas  $(y, z)$  es el punto final en el cual se desea que esté el efector. Por ejemplo, si se desea que el efector del manipulador llegue al punto  $P(10.66, 10.04)$ , entonces haciendo  $\beta=30^\circ$  y  $a=b=c=5$  se tiene que:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 20.2191039^\circ & \varphi_2 &= -20.2191039^\circ \\ \theta_1 &= 39.8767976^\circ & \theta_2 &= 60.095901^\circ \\ \theta_3 &= 20.2191039^\circ & \theta_3 &= -20.2191039^\circ \\ \varphi_4 &= 39.8767976^\circ & \varphi_4 &= 60.095901^\circ \end{aligned}$$

Al acotar el problema de esta forma, se pueden llegar a encontrar hasta cuatro orientaciones distintas para un mismo ángulo  $\beta$ . El inconveniente de intentar obtener la Solución a la Cinemática Inversa de esta manera consiste en que puede llegar a no haber una solución al problema para un valor determinado de  $\beta$ , debido a que para esa orientación específica del eslabón 3 el manipulador no pueda alcanzar el punto deseado con su efector.

## DISEÑO DEL CONTROLADOR DIFUSO

Para el diseño del controlador, primero es necesario definir de manera lógica y con palabras, la forma en que los seres humanos movemos nuestros brazos, antebrazos y muñecas. Esto es para facilitar la codificación de un conjunto de reglas difusas para un manipulador de geometría similar al brazo humano (5). Cuando un niño toma un objeto, primero, orienta su tronco, luego acerca su brazo, y por último mueve la muñeca para tomar el objeto.

Estos movimientos debido a la "experiencia" que se va tomando, se realizan

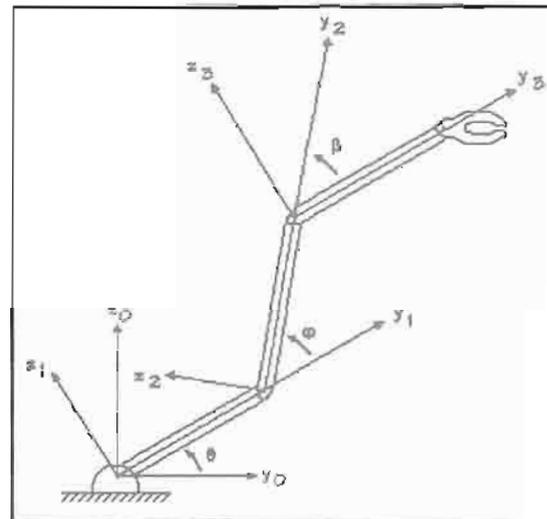


Figura 1. Manipulador de tres grados de libertad

simultáneamente. Para diseñar el controlador difuso se dividió en dos partes: una de acercamiento y otra de aproximación fina. En la etapa de acercamiento se busca que los 3 eslabones del manipulador (Figura 1), obtengan una orientación que acerque al manipulador y que el efector pueda alcanzar un punto específico deseado en la etapa de aproximación fina.

## Controlador de Acercamiento

El Controlador Difuso de Acercamiento define la orientación previa del manipulador con respecto al punto final deseado para el efector, de tal manera que se proporcionen los valores de los ángulos para los 3 eslabones. En la Tabla 1 se muestran las variables de entrada y salida que se utilizan para el controlador difuso de acercamiento.

El segmento  $OP$  es la distancia que existe del origen a  $P(x, y)$ . El ángulo  $\varphi_{en}$  es el ángulo que define la posición actual del eslabón  $n$ , mientras que  $\varphi_p$  es el ángulo del segmento  $OP$ . Los ángulos  $\Delta\varphi$ ,  $\varphi_{en}$  y el ángulo  $\varphi_p$ , determinan si el vector  $OP$  tiene la misma orientación que el eslabón en cuestión. La variable de entrada  $r$  determina si el punto final del eslabón está o no cercano al origen del eslabón. La variable de salida "y" determina el movimiento del eslabón, ya sea en sentido positivo, en sentido negativo o sin cambios.



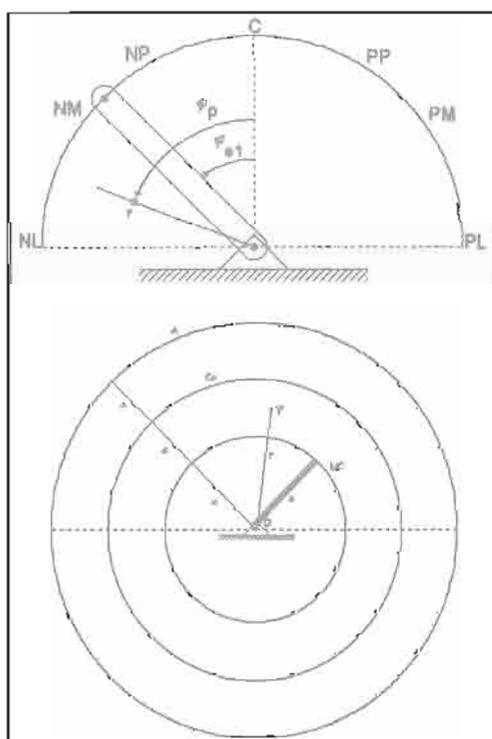
**Tabla 1. Variables de entrada y de salida.**

Variables de entrada:	
$\varphi_{en}$	
$\varphi_p$	
$\Delta\varphi$	
$r$	

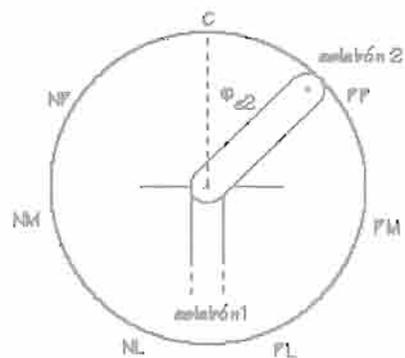
  

Variables de salida:	
$y$	

En la Figura 2 se puede ver de manera gráfica las variables de entrada medidas para el eslabón 1, mientras que en la Figura 3, se muestran la disposición de las variables de entrada y las funciones de pertenencia para todos los eslabones diferentes del eslabón con origen fijo.



**Figura 2. Variables de entrada para el eslabón 1.**

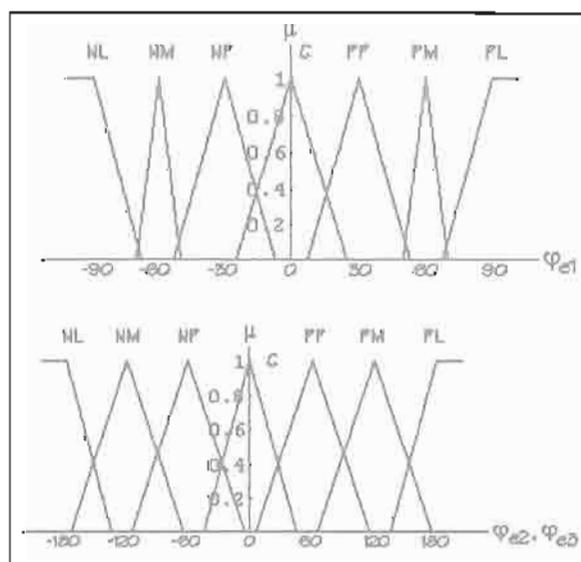


**Figura 3. Variables para los Eslabones.**

### Conjuntos Difusos

La Figura 4 ilustra las funciones de pertenencia para los ángulos  $\varphi_{e1}$ ,  $\varphi_{e2}$  y  $\varphi_{e3}$ , donde, como puede verse, se ha limitado el movimiento del eslabón 1 de  $0^\circ$  a  $90^\circ$  mientras que a los eslabones 2 y 3 se les permite moverse desde  $-180^\circ$  a  $180^\circ$ . Las funciones de pertenencia están igualmente espaciadas debido a que lo único que nos interesa es monitorear la posición del eslabón (6).

Las funciones de pertenencia de  $\Delta\varphi_1$ ,  $\Delta\varphi_2$  y  $\Delta\varphi_3$  se encuentran en la Figura 5, donde puede notarse que cuanto más cercanas están a cero,



**Figura 4. Funciones de Pertenencia para los ángulos de los eslabones.**



más estrechas son. Esto debe hacerse para que el funcionamiento del controlador difuso sea más fino y además para permitir la convergencia del mismo. Cabe mencionar también que el dominio de  $\Delta\phi_1$  va de  $-180^\circ$  a  $180^\circ$  mientras que para  $\Delta\phi_2$  y  $\Delta\phi_3$  va de  $-360^\circ$  a  $360^\circ$  para poder detectar diferencias grandes entre el ángulo del eslabón y el del vector  $OP$ .

En la Figura 6 se muestran las gráficas de las funciones de pertenencia para las variables  $r_1$ ,  $r_2$  y  $r_3$  que miden la proximidad del punto  $P(x,y)$  con respecto al origen del eslabón en cuestión. Con estas funciones de pertenencia, el controlador difuso de acercamiento puede saber si es necesario alejar o acercar al eslabón y determinar el movimiento necesario. Como se puede ver, sólo se determina si el punto en cuestión está: muy cercano, cercano o alejado del origen del eslabón, lo cual determina la lógica de movimiento dado por las reglas de inferencia que serán mostradas en la siguiente sección.

En el caso de la Figura 7, se ajustaron las funciones de pertenencia para que dicho eslabón se orientara lo más posible al punto al cual se desea que llegue el efector, lo cual facilitará en gran medida el trabajo del controlador de aproximación.

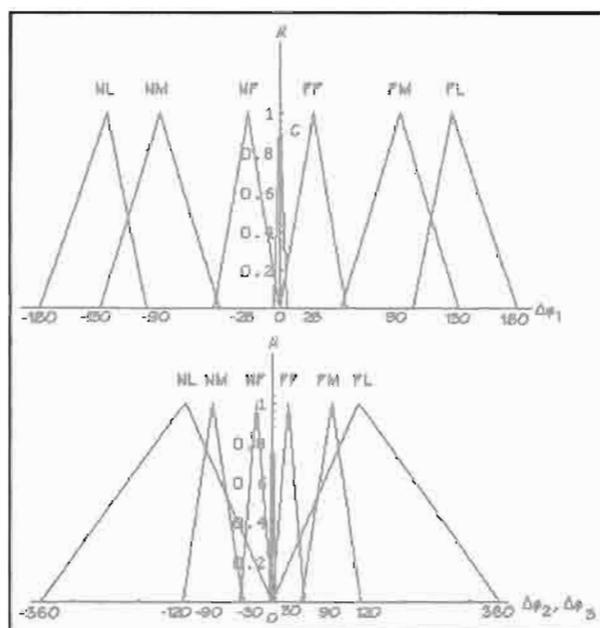


Figura 5. Funciones de Pertenencia para  $\Delta\phi_1$ ,  $\Delta\phi_2$  y  $\Delta\phi_3$ .

Quizás el ajuste de las funciones de pertenencia del sistema sea lo que lleve más tiempo en el diseño de sistemas difusos. Sin embargo, pueden utilizarse técnicas de optimización como Algoritmo Genético o RNA, para el ajuste de dichas funciones en el dominio de cada variable.

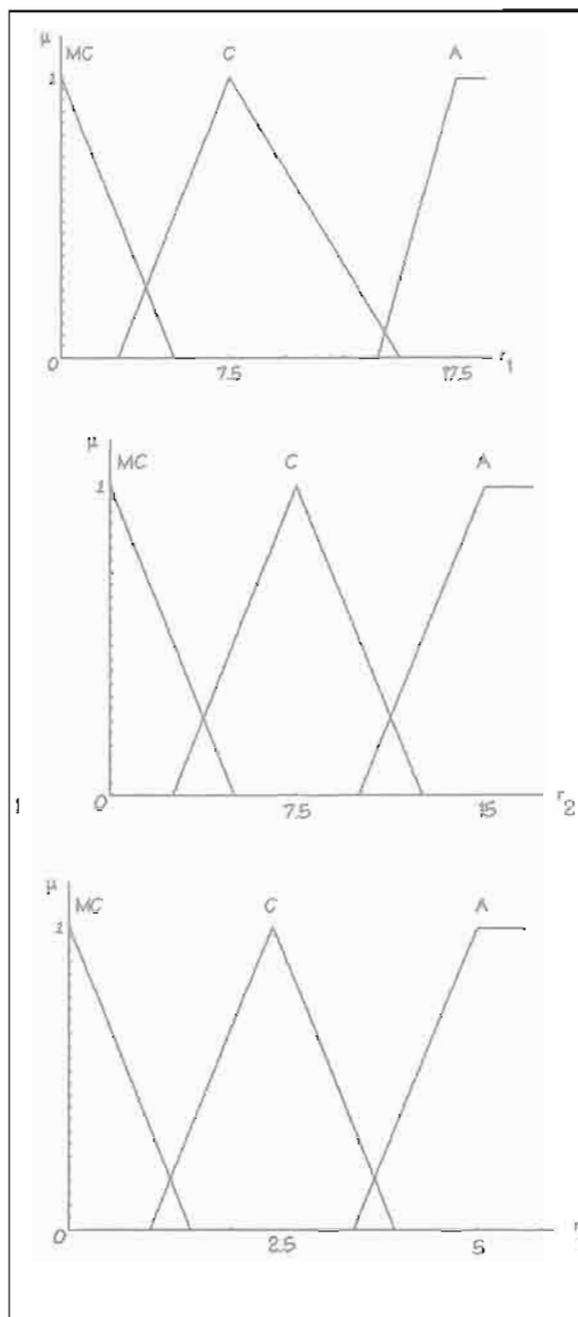


Figura 6. Funciones de Pertenencia para  $r_1$ ,  $r_2$  y  $r_3$

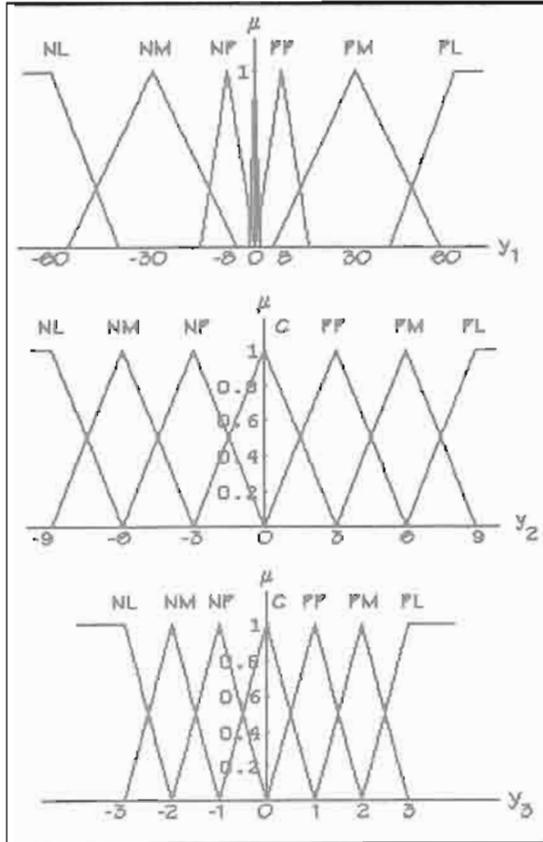


Figura 7. Funciones de Pertinencia para las salidas  $y_1$ ,  $y_2$  y  $y_3$ .

### Reglas de Inferencia

A continuación se define la terminología usada en las matrices *FAM*:

- PL Positivo Largo
- PM Positivo Mediano
- PP Positivo Pequeño
- C Cero
- NP Negativo Pequeño
- NM Negativo Mediano
- NL Negativo Largo
- MC Muy Cercano
- Ce Cercano
- A Alejado

Las reglas de inferencia se presentan en las matrices *FAM* que siguen en función del valor de  $\varphi_{en}$ :

$\varphi_{en} = NP,$   
 $\varphi_{en} = NM$  y  
 $\varphi_{en} = NL$

		$r$		
		MC	Ce	A
$\Delta\varphi$	PL	C	NP	NL
	PM	PP	C	NM
	PP	PM	PP	NP
	C	PL	PM	C
	NP	PL	PL	PP
	NM	NP	C	PM
NL	C	PP	PL	

$\varphi_{en} = PP,$   
 $\varphi_{en} = PM$  y  
 $\varphi_{en} = PL$

		$r$		
		MC	Ce	A
$\Delta\varphi$	PL	C	NP	NL
	PM	PP	C	NM
	PP	NL	NL	NP
	C	PL	NM	C
	NP	NM	NP	PP
	NM	NP	C	PM
NL				

$\varphi_{en} = C$

		$r$		
		MC	Ce	A
$\Delta\varphi$	PL	C	NP	NL
	PM	PP	C	NM
	PP	PM	PP	NP
	C	PL	PM	C
	NP	NM	NP	PP
	NM	NP	C	PM
NL	C	PP	PL	

Para cualquier valor de  $\varphi_{en}$ , si  $r = MC$  esto implica que el punto final del efector se encuentra cercano al origen del eslabón en cuestión, por lo cual la salida "y" se escoge para que el eslabón se aleje de ese punto, tratando siempre de que  $\Delta\varphi$  sea positivo o negativo largo para que el manipulador pueda alcanzar dicho punto, definiéndose:

$$\Delta\varphi = \varphi_{en} - \varphi_p \quad \text{Ec. 7}$$

De igual manera para cualquier valor de  $\varphi_{en}$ , si  $r = Ce$  esto significa que el punto no está muy



cercano al origen del eslabón en cuestión pero tampoco está demasiado alejado por lo cual se desea que la salida "y" mueva al eslabón de tal manera que esté parcialmente orientado en la dirección del punto final del efector.

En el otro caso en el que  $r=A$ , se deduce que el punto final del efector está muy alejado del eslabón en cuestión, por lo cual manda una señal de control que mueva al eslabón de tal manera que se oriente en la misma dirección que la del punto final del efector, para que el manipulador pueda tener el máximo alcance en su espacio de trabajo.

### Método de Defuzzificación.

Para este controlador se decidió utilizar el Método del Centroide para la defuzzificación de la salida debido a que este método logra obtener una salida que toma en cuenta las contribuciones de todas y cada una de las reglas de inferencia del sistema (7). Este método está descrito por la siguiente ecuación:

$$\bar{B} = \frac{\sum_{j=1}^p y_j \mu_B(y_j)}{\sum_{j=1}^p \mu_B(y_j)} \quad \text{Ec. 8}$$

donde:

- $B$ = centroide del área difusa (salida real).
- $y_j$ = centroide del área de la función de pertenencia de salida  $j$ .
- $\mu_B(y_j)$ =valor de pertenencia del elemento producto de la inferencia difusa.
- $p$ = número de conjuntos difusos de salida.

### Controlador de Aproximación

El controlador de aproximación es en sí un algoritmo que busca cambiar los ángulos de los 3 eslabones para lograr que el efector alcance el punto deseado. Primeramente se utiliza el ángulo final  $\beta$  del controlador de acercamiento para solucionar la cinemática inversa y mueve al manipulador. Si no encuentra solución, entonces cambia el valor de este ángulo y trata de encontrar una solución para los otros dos eslabones. Si el punto  $P$  deseado está fuera del

espacio de trabajo del manipulador, el controlador de aproximación simplemente orienta a los eslabones en la misma dirección del vector  $OP$  y enciende una bandera.

### SIMULACIÓN

Para la simulación en computadora primeramente se realizó un programa en lenguaje C que contiene procedimientos para el manejo de sistemas difusos. Asimismo se requiere que el usuario determine ciertas cantidades constantes tales como el número de variables de entrada y salida del sistema, número y especificación de las funciones de pertenencia de todos los conjuntos difusos del sistema.

### RESULTADOS

En el presente inciso se presentan los resultados de la simulación, mediante gráficas que ilustran la evolución de la orientación del manipulador. Se realizaron diferentes pruebas, cambiando la condición inicial del manipulador y especificando puntos  $P(x,y)$  diferentes dentro y fuera del espacio de trabajo (Figura 8 y Figura 9).

El controlador puede posicionar el efector del manipulador en el punto deseado independientemente de las condiciones iniciales. De acuerdo a los resultados

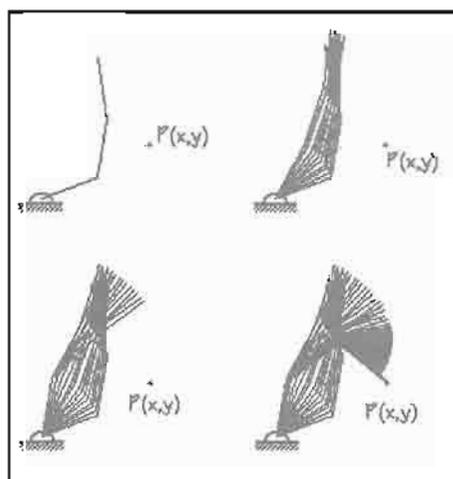


Figura 8. Evaluación del manipulador.

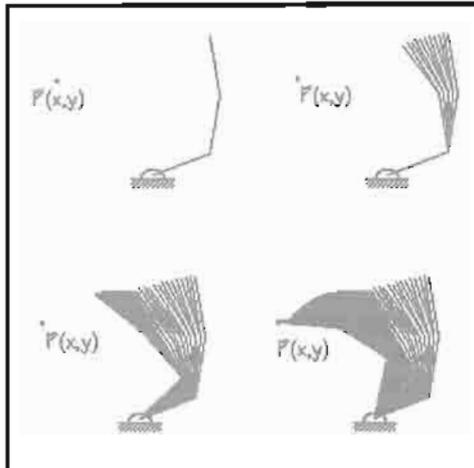


Figura 9. Evaluación del manipulador.

obtenidos, cuando el manipulador no puede alcanzar el punto, éste simplemente se orienta en esa dirección. Cuando el punto deseado está muy cercano al origen del eslabón fijo, éste último se aleja del punto dependiendo de su cercanía para permitir el plegado de los otros dos eslabones para alcanzar su objetivo.

### CONCLUSIONES

La ventaja del razonamiento que se utilizó en este trabajo para el diseño del controlador puede aplicarse para el diseño de controladores difusos de manipuladores con otras configuraciones. De esta forma se pueden obtener sistemas de control de robots sencillos de implantar, mantener y comprender sin ser necesaria la obtención del modelo matemático del brazo a controlar.

Uno de los principales problemas de los sistemas difusos es el ajuste y puesta a punto de la ubicación de las funciones de pertenencia sobre todo cuando se manejan varias entradas, debido a que para determinados estados suelen activarse reglas no deseadas, por estar mal ajustadas dichas funciones de pertenencia. Los últimos avances presentan el uso de técnicas de optimización y búsqueda como RNA y Algoritmo Genético. Estas técnicas ajustan la ubicación de estas funciones hasta alcanzar un nivel óptimo.

La utilización de la Lógica Difusa es una solución viable para el diseño y aplicación de controladores en diferentes áreas de la ingeniería debido a:

- La sencillez de su estructura, porque su implantación se parece más al lenguaje natural humano.
- La facilidad de ajuste y modificación del controlador.
- Robustez del controlador.

### REFERENCIAS

1. Schwartz, D., Klit, G., Japan goes Fuzzy, *IEEE Spectrum*, USA, julio, 1992.
2. Cox, E., Fuzzy Fundamentals, *IEEE Spectrum*, USA, octubre 1992.
3. Omron Electronics, Inc., *Fuzzy Logic a 21st Century Technology*, USA, *Technical Information*, 1991.
4. Spong, M., Vidyasagar, M., *Robot Dynamics and Control*, USA, John Wiley & Sons, 1989.
5. Jamshidi, M., Vadice, N., Ross, T., *Fuzzy Logic and Control*, USA, Prentice Hall, 1993.
6. Cox, E., *The Fuzzy Systems Handbook*, USA, Academic Press, Inc., 1994.
7. Kosko, B., *Neural Networks and Fuzzy Systems*, USA, Prentice Hall, 1992.