



## CONTROL ADAPTABLE BASADO EN EL ANÁLISIS DE PASIVIDAD PARA UN ROBOT MANIPULADOR RÍGIDO DE DOS GRADOS DE LIBERTAD

Ma. del Carmen Lule-Capinteyro y Hugo G. González-Hernández  
Laboratorio del Centro de Investigación, Universidad La Salle

### RESUMEN

El desarrollo de técnicas efectivas de control representa un paso importante en aplicaciones de robótica, pues éstas se ven afectadas por incertidumbres paramétricas. Una alternativa para controlar un robot manipulador del cual no se conoce el modelo dinámico nominal, es el diseñar un control adaptable. En este artículo se presenta el diseño basado en análisis de pasividad y bajo el criterio de Lyapunov, de un control adaptable para un robot manipulador rígido con articulaciones rotacionales de dos grados de libertad con incertidumbre paramétrica. Se prueba este controlador realizando el seguimiento de una trayectoria deseada.

### ABSTRACT

The development of effective control techniques represents a great deal in robotics applications because there exist parametric uncertainty. Adaptive control techniques offer an alternative strategy for this problem. In this paper we show a passivity analysis based design of an adaptive control for a two-degree-of-freedom rigid manipulator in such a way that this controller allows us to have global asymptotic stability for tracking a desired trajectory.

### INTRODUCCIÓN

Cuando no se conoce por completo el modelo nominal<sup>1</sup> de la dinámica del robot manipulador, es decir, que existen incertidumbres en algunos o todos los elementos que la componen, se propone compensar este desconocimiento paramétrico con estrategias adaptables para su control, pues tienen la ventaja de que el mecanismo de adaptación extrae información del sistema tratando de llegar al conocimiento de éste por completo en un tiempo finito teniendo como referencia el error de seguimiento.

Las leyes de control adaptable pueden ser clasificadas de acuerdo a su objetivo de control y la señal que dirige la ley de sintonización de los parámetros. El objetivo de control determina la estructura en el controlador de los parámetros, los cuales van a ser sintonizados en línea. La ley de sintonización o estimación, en cambio, puede ser dirigida por una señal que mida, o bien el error entre los parámetros

estimados y los reales (error de predicción) o el error entre la salida deseada y la salida actual del sistema (error de seguimiento).

En este artículo se discutirá el diseño de un controlador adaptable de dinámica inversa, también llamado par calculado pasivo, cuyo objetivo de control es, además de la linealización<sup>2</sup> del sistema, preservar las propiedades de pasividad de la dinámica del manipulador en lazo cerrado.

La presentación está organizada de la siguiente forma: en la primera sección se presentan algunas definiciones que serán de utilidad para las pruebas de estabilidad y análisis de pasividad; en la segunda sección se presenta la derivación de las ecuaciones de la dinámica del manipulador mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange; en la tercera sección una vista rápida al controlador *Par*

<sup>1</sup> Sistema altamente no lineal.

<sup>2</sup> Es un caso especial de retroalimentación para la linealización de un sistema no lineal, esto es, obtener un sistema en lazo cerrado el cual es lineal y desacoplado.



calculado pasivo tanto para el caso de parámetros conocidos y el diseño del controlador adaptable para parámetros desconocidos; y por último, en la cuarta sección se presenta la simulación de un caso de una configuración específica para un manipulador de 2 grados de libertad en el seguimiento de una trayectoria dada.

## 1. NOTACIÓN Y TERMINOLOGÍA

En principio se presenta la notación y algunas definiciones, lemas y teoremas que se manejarán a lo largo de los diferentes análisis y derivaciones.

$\mathbb{R}_+$  denota el conjunto de los números reales no negativos.

$\mathbb{R}^n$  denota el espacio vectorial  $n$ -dimensional sobre los reales.

= se entiende como *igual por definición*.

$D_x f$  es equivalente a  $df/dx$

*sup* significa *supremo de*.

**Definición 1.** La norma euclidiana está definida como:

$$\|x\| = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

**Definición 2.** El espacio lineal  $L_2$  es el conjunto de las funciones  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tal que:

$$\|f\|_2 = \int_0^\infty |f(t)|^2 dt < \infty$$

El espacio lineal  $L_\infty$  es el conjunto de las funciones  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tal que:

$$\|f\|_\infty = \sup_i \|f_i(t)\| < \infty$$

donde  $\|f\|_2$  es la norma  $L_2$  y  $\|f\|_\infty$  es la norma  $L_\infty$ , lo que implica que ambos espacios son espacios lineales normados.

**Definición 3.** Una función  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es continua si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

**Definición 4.** Una función  $f$  es *uniformemente continua* si  $\exists k > 0, k \in \mathbb{R}$ , tal que:

$$\|f(x)\| \leq k < \infty$$

$$\left\| \frac{df(x)}{dx} \right\| \leq k < \infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

esto es que  $f \in L_\infty$  y  $D_x f \in L_\infty$ .

**Lema 1.** Considere las funciones continuas y diferenciables  $x: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $y: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Defínase una función  $V: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_+$  dada por:

$$V(x, y) = x^T K x + y \geq 0$$

$$K = K^T > 0 \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

Si  $\exists$  una función  $z: \mathbb{R} \rightarrow U$ ,  $U$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^m$  de dimensión  $i$  ( $i \leq m$ ), tal que:

$$\dot{V}(x, y) = -z^T K_2 z \leq 0$$

$$K_2 = K_2^T > 0 \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

entonces:  $x \in L_\infty, y \in L_\infty, z \in L_2^1$

Abusando de la notación de tal forma que, si  $H(s)$  es una función de transferencia en variable compleja  $s$  de una función (transformable en Laplace)  $h(t)$  y  $r(t)$  es una función del tiempo, entonces  $H(s)r$  estará dada por  $(h^*r)(t)$ , donde  $*$  denota el producto de convolución. Con esta notación tenemos que:

**Lema 2.** (2) Sea

$$e = H(s)r$$

donde  $H(s)$  es una función de transferencia exponencialmente estable de dimensión  $n \times m$  y estrictamente propia.

Entonces:  $r \in L_2^n \Rightarrow e \in L_2^n \cap L_\infty^n, D_x e \in L_2^n$ ;  $e$  es continua y  $e \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ . Además  $r \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ , entonces  $D_x e \rightarrow 0$ .

Si  $r \in L_\infty^n$ , entonces  $e \in L_\infty^n$  y  $D_x e \in L_\infty^n$ .



**Definición 5.** Un mapeo  $x \rightarrow y$  es pasivo si y solamente si:

$$\langle x|y \rangle_T := \int_0^T x^T y dt \geq -\beta$$

$$\beta > 0, \forall T$$

**Teorema de Barbalath.** Si una función diferenciable  $f(t)$  tiene un límite finito cuando  $t \rightarrow \infty$  si  $D_x f(t)$  es uniformemente continua.

Entonces  $D_x f(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ .

$f(t)$  es continua en  $[0, \infty)$  si  $\forall t_1 \geq 0, \forall R > 0 \exists \eta(R, t_1) > 0$ , tal que  $\forall t \geq 0, |t - t_1| < \eta$ , entonces  $|f(t) - f(t_1)| < R$ .

$f(t)$  es uniformemente continua si  $D_x f(t)$  está acotada.

**Corolario (Barbalath usando el criterio de Lyapunov).** Sea la función escalar  $V(x,t)$ , tal que:

- i)  $V(x,t) \geq \beta > 0$
  - ii)  $dV(x,t)/dt \leq 0$
  - iii)  $dV(x,t)/dt$  es uniformemente continua
- $\Rightarrow dV(x,t)/dt \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ .

## 2. DINÁMICA DE MANIPULADORES RÍGIDOS.

Utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange, tal que (2):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau \quad (\text{Ec. 1})$$

donde  $q = (q_1, \dots, q_n)^T$  es el conjunto de coordenadas generalizadas del manipulador,  $L$  es el lagrangiano definido como la diferencia entre la energía cinética  $K$  y la energía potencial  $P$ , y  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)^T$  es el vector de fuerzas generalizadas que actúan sobre el sistema. Un caso especial importante es en el cual la energía potencial  $P=P(q)$  es independiente de  $D_x q$  y la energía cinética es

una función cuadrática del vector  $D_x q$  de la forma:

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i,j} H_{i,j}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \dot{q}^T H(q) \dot{q} \quad (\text{Ec. 2})$$

donde  $H(q)$  es una matriz  $n \times n$ , simétrica y positiva definida para cada  $q \in \mathbb{R}^n$  llamada matriz de inercia. En este caso,  $q$  son las posiciones de la articulación.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para un sistema dado pueden ser obtenidas, tal que:

$$L = K - P = \frac{1}{2} \sum_{i,j} h_{i,j}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - P(q) \quad (\text{Ec. 3})$$

Entonces:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_j h_{kj}(q) \dot{q}_j$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_j h_{kj}(q) \ddot{q}_j + \sum_j \frac{d}{dt} h_{kj}(q) \dot{q}_j =$$

$$= \sum_j h_{kj}(q) \ddot{q}_j + \sum_{i,j} \frac{\partial h_{kj}}{\partial q_i} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial h_{kj}}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{\partial P}{\partial q_k}$$

$\Rightarrow$

$$\sum_j h_{kj}(q) \ddot{q}_j + \sum_{i,j} \frac{\partial h_{kj}}{\partial q_i} \dot{q}_i \dot{q}_j +$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial h_{kj}}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{\partial P}{\partial q_k} = \tau_k$$

$$k = 1, \dots, n \quad (\text{Ec. 4})$$

Intercambiando el orden de las sumatorias en el segundo término y tomando ventaja de la simetría de la matriz de inercia, entonces:

$$\sum_{i,j} \left\{ \frac{\partial h_{kj}}{\partial q_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{ij}}{\partial q_k} \right\} \dot{q}_i \dot{q}_j =$$

$$\sum_{i,j} \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial h_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial h_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial q_k} \right\} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (\text{Ec. 5})$$



Los coeficientes

$$c_{ijk} := \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial h_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial h_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial q_k} \right\}$$

son conocidos como los *símbolos de Christoffel* (de primer tipo). Si tenemos:

$$\phi_k = \frac{\partial P}{\partial q_k} \quad (\text{Ec. 6})$$

entonces podemos reescribir las ecuaciones de Euler-Lagrange como:

$$\sum_j h_{kj}(q)\ddot{q}_j + \sum_{i,j} c_{ijk}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j + \phi_k(q) = \tau_k.$$

$$k = 1, \dots, n \quad (\text{Ec. 7})$$

Podemos observar que hay tres tipos de términos dentro de estas ecuaciones. El primero involucra la segunda derivada de las coordenadas generalizadas. El segundo son términos cuadráticos en la primera derivada de  $q$ , donde los coeficientes dependen de  $q$ . Éstos son clasificados de 2 tipos, los que involucran el producto de  $\dot{q}_i^2$  llamados de *fuerza centrífuga* y los que involucran productos del tipo  $\dot{q}_i\dot{q}_j$ , donde  $i \neq j$ , son llamados *términos de Coriolis*. El tercer tipo son los que involucran sólo a  $q$  pero no a sus derivadas. Comúnmente (7) se escribe de la forma:

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (\text{Ec. 8})$$

donde los elementos del segundo término son definidos como:

$$c_{kj} := \sum_{i=1}^n c_{ijk}(q)\dot{q}_i \quad (\text{Ec. 9})$$

### Propiedades Fundamentales

Éstas se muestran en el cuadro 1. Además, todos los parámetros constantes tales como longitudes y masas de los eslabones, momentos de inercia, etc. aparecen como coeficientes de funciones conocidas de las coordenadas generalizadas. Definiendo cada

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau$$

o

$$H(q)\ddot{q} + N(q, \dot{q}) = \tau$$

donde:

$$N(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q)$$

Matriz de Inercia

$H(q)$  es simétrica y definida positiva

$$\mu_1 I \leq H(q) \leq \mu_2 I$$

$$m_1 \leq \|H(q)\| \leq m_2$$

Vector de fuerza centrífuga y de Coriolis

$C(q, \dot{q})$  es cuadrática en  $\dot{q}$

$$\|C(q, \dot{q})\| \leq v_b \|\dot{q}\|^2$$

$S(q, \dot{q}) = \dot{H}(q) - 2C(q, \dot{q})$  es una matriz skew-simétrica

Vector de Gravedad

$$\|g(q)\| \leq g_b$$

Cuadro 1. Propiedades Fundamentales.

coeficiente como un parámetro separado, se tiene una relación lineal dada por:

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\theta = \tau \quad (\text{Ec. 10})$$

donde  $Y(q, \dot{q}, \ddot{q})$  es una matriz de  $n \times r$  de funciones conocidas, llamado también *regresor*, y  $\theta$  es un vector  $r$ -dimensional de parámetros.

Además, sabemos que la Ec. 8 es un mapeo pasivo de  $\tau \rightarrow \dot{q}$  (1) en lazo abierto.

### 3. CONTROL POR CALCULADO PASIVO Y PAR CALCULADO PASIVO ADAPTABLE.

Hasta aquí se presenta la dinámica de un manipulador de  $n$  grados de libertad. El problema que se presenta en forma general en robótica es el seguimiento de una trayectoria



deseada por parte del manipulador, por lo que se necesita encontrar un cierto controlador, que permita llevar a cabo este objetivo en el menor tiempo posible, con una cierta exactitud y manteniendo o haciendo al sistema estable según sea el caso.

La noción de estabilidad es con respecto a un punto, el cual generalmente es el punto de equilibrio<sup>3</sup> del sistema en una cierta vecindad; es por esto que, el diseño del controlador se realiza bajo el espacio del error entre las trayectorias deseadas y las trayectorias que genera el manipulador, pues dado que deseamos que se mantenga en su punto de equilibrio, tenemos que si el error queda en su punto de equilibrio, es igual a cero, por lo que la trayectoria generada por el manipulador es igual a la trayectoria deseada.

Dado lo anterior se propone que el error ( $s$ ) se define como:

$$\begin{aligned} s &= \dot{q} - \dot{q}_d \\ \dot{q}_r &= \dot{q}_d - \alpha \Delta q \end{aligned} \quad (\text{Ec. 11})$$

donde  $\alpha$  es una matriz real, diagonal, definida positiva.

Ahora bien, si hacemos un lazo cerrado con un controlador basado en un controlador PD, el cual permita cancelar las no linealidades, este será definido como:

$$\begin{aligned} \tau &= H(q)(\ddot{q}_d - \alpha \Delta \dot{q}) + C(q, \dot{q})(\dot{q}_d - \alpha \Delta \dot{q}) + \\ &+ g(q) - K_d s \end{aligned} \quad (\text{Ec. 12})$$

donde  $K_d$  es una matriz diagonal constante definida positiva.

*Teorema.* Considere la dinámica del manipulador de  $n$  grados de libertad en lazo cerrado con el controlador de Ec. 12 definiendo el error como la Ec. 11. Entonces las

<sup>3</sup> Un punto  $x_{eq}$  es un punto de equilibrio si una vez que  $x(t) = x_{eq}$ ,  $x(t)$  permanece en  $x_{eq} \forall t$ . Esto es,

$$\dot{x}(t) = f(x_{eq}) = 0$$

trayectorias del error convergerán asintóticamente a cero.

*Prueba.* Considere la función candidata de Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2} s^T H(q) s$$

Obteniendo la derivada evaluada sobre las trayectorias del error, tomando en cuenta las propiedades sobre los términos de la ecuación de la dinámica del manipulador, resulta como:

$$\dot{V} = -s^T K_d s$$

Entonces utilizando el teorema de Lyapunov resulta que  $s = \Delta \dot{q} + \alpha \Delta q \rightarrow 0$  en el límite  $\Delta \dot{q} \rightarrow 0, \Delta q \rightarrow 0$ .

Cuando se habla de este tipo de controladores se deben tomar en cuenta ciertas condiciones iniciales; la más importante es el conocimiento exacto de toda la estructura, siendo esta situación casi nula la mayor parte de las veces en la práctica, pues existe incertidumbre de los parámetros de la dinámica.

Dada esta situación se presentan 2 posibles soluciones, una de ellas es la utilización de un control adaptable, el cual estima los parámetros de la planta hasta llegar a un comportamiento parecido o igual al del sistema deseado; la otra es la utilización de un control robusto, compone la estructura del controlador dependiendo de ciertas cotas conocidas del sistema. El control adaptable tiene un mayor desempeño que el controlador robusto, puesto que el primero mejora su desempeño en línea de acuerdo a las condiciones del tiempo  $t$ , mientras que el segundo mantiene un desempeño fijo para cualquier tiempo.

Dentro del control adaptable se distinguen dos estructuras: el control adaptable directo e indirecto.

En el caso del control adaptable directo, la estimación se realiza sobre los parámetros del control; mientras que para el caso del control adaptable indirecto se estima primero el sistema, y posteriormente se calcula el control bajo el resultado arrojado por el método de identificación.



Para diseñar un control adaptable se requiere acceso al estado del sistema, la parametrización lineal de la planta, y por último, que las no linealidades puedan ser canceladas cuando los parámetros son conocidos.

Entonces, conociendo lo anterior y para el propósito del presente, se da a continuación la estructura de un control adaptable directo basado en el control por calculado pasivo visto anteriormente.

Ahora el objetivo es hacer que la trayectoria real converja a una deseada, sin garantizar que los parámetros estimados converjan a los reales, pero que permanezcan acotados.

#### 4. DISEÑO DE CONTROL ADAPTABLE PARA UN MANIPULADOR DE $N$ GRADOS DE LIBERTAD.

Teniendo la ecuación

$$H(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{H}(q)\dot{q} + S(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (\text{Ec. 13})$$

Dado que la estructura de la dinámica no es conocida, se tiene que el control referenciado por  $\tau$  es de la forma:

$$\tau = \hat{H}(q)\ddot{q}_r + \frac{1}{2}\hat{H}(q)\dot{q}_r + \hat{S}(q, \dot{q})\dot{q}_r + \hat{g}(q) - K_d s \quad (\text{Ec. 14})$$

Entonces en lazo cerrado, las Ecs. 13 y 14 quedan como:

$$\begin{aligned} H(q)(\ddot{q} - \ddot{q}_r) + \frac{1}{2}\dot{H}(q)(\dot{q} - \dot{q}_r) + S(q, \dot{q})(\dot{q} - \dot{q}_r) = \\ = Y(q, \dot{q}, \ddot{q}, \ddot{q}_r)(\theta - \hat{\theta}) - K_d s = Y_r \Delta\theta - K_d s \end{aligned} \quad (\text{Ec. 15})$$

Sustituyendo el valor de  $s$  queda:

$$H(q)\dot{s} = -\frac{1}{2}\dot{H}(q)s + S(q, \dot{q})s + Y_r \Delta\theta - K_d s \quad (\text{Ec. 16})$$

Ya encontrado el control, debemos analizar la estabilidad del nuevo sistema, para lo cual necesitamos obtener o proponer una función de

Lyapunov; para esto, se procederá a un análisis de pasividad aumentando una variable más al control, que funcionará sólo como herramienta matemática, y la denominaremos con  $\tau'$ , cuyo valor es cero. Entonces, el control queda como:

$$\tau = Y_r \Delta\theta - K_d s + \tau' \quad (\text{Ec. 17})$$

El control en lazo cerrado con la dinámica resulta:

$$H(q)\dot{s} + \frac{1}{2}\dot{H}(q)s + S(q, \dot{q})s - Y_r \Delta\theta + K_d s = \tau'$$

Ahora para la pasividad, debe ser entre la entrada  $\tau'$  y la salida  $s$

$$\begin{aligned} s^T \tau' = s^T H(q)\dot{s} + \frac{1}{2}s^T \dot{H}(q)s + \\ + s^T S(q, \dot{q})s - s^T Y_r \Delta\theta + s^T K_d s \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} s^T S(q, \dot{q})s &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} s^T H(q)s \right) &= s^T H(q)\dot{s} + \frac{1}{2} s^T \dot{H}(q)s \end{aligned}$$

Si no existiera el término  $-s^T Y_r \Delta\theta$ , el mapeo entre la entrada y la salida sería estrictamente pasivo. Por lo tanto, necesitamos agregar un término más al control, de tal forma que podamos establecer el mapeo pasivo deseado, pero debido a que no conocemos los parámetros reales, no se puede introducir tal cual; esto es, el error paramétrico  $\Delta\theta$  es desconocido. Entonces, se propone una nueva entrada vía la salida de un integrador en el estimado de los parámetros  $\hat{\theta}$ , esto es:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} s^T H(q)s + V_2 \\ \dot{V} &= -s^T K_d s - s^T Y_r \Delta\theta + \dot{V}_2 \\ \dot{V}_2 &= -s^T K_d s \end{aligned}$$

Entonces, conociendo lo anterior, debemos introducir  $s^T Y_r \Delta\theta$  vía  $\dot{\hat{\theta}}$  para cancelar los términos que impiden el tener el mapeo pasivo.

Ahora, se tiene a  $\hat{\theta}$  como un nuevo estado en el sistema, pero al darse el desconocimiento de los parámetros, el nuevo estado queda en



función de  $\Delta\theta$ , que entra en la función de Lyapunov de forma cuadrática:

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{1}{2} \Delta\theta^T \Delta\theta \\ \dot{V}_2 &= \Delta\theta^T \Delta\dot{\theta} = \Delta\theta^T (\dot{\theta} - \hat{\dot{\theta}}) \\ \rightarrow \dot{\theta} &= 0 \quad \Rightarrow \dot{V}_2 = -\Delta\theta^T \hat{\dot{\theta}} \\ \hat{\dot{\theta}} &= -Y_r^T s \quad \Rightarrow \dot{V}_2 = \Delta\theta^T Y_r^T s \end{aligned}$$

Si  $V=V_1+V_2$ , la derivada de  $V$  es  $-s^T K_d s$ , la cual es  $\leq 0$  y asegura según lo visto en la sección 1, la estabilidad asintótica global de  $s$  tomando en cuenta que:

$$s = \Delta\dot{q} + \alpha \Delta q \rightarrow 0 \text{ en el límite } \Delta\dot{q} \rightarrow 0, \Delta q \rightarrow 0$$

Luego, tanto las trayectorias de la posición como las trayectorias de velocidad del manipulador tienden a las trayectorias deseadas cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Por lo que el control queda de la forma:

$$\begin{aligned} \tau &= Y_r \Delta\theta - K_d s \\ \hat{\dot{\theta}} &= -\Gamma Y_r^T s \end{aligned} \quad (\text{Ec. 18})$$

donde  $K_d \in \mathbb{R}^{n \times n} > 0$  y  $\Gamma \in \mathbb{R}^{r \times r} > 0$  es una matriz de ganancia<sup>4</sup> y diagonal.

*Teorema.* Considere el control de Ec. 18 en lazo cerrado con la dinámica del manipulador, entonces:

$$q(t) \rightarrow q_d(t), \quad \dot{q}(t) \rightarrow \dot{q}_d(t), \quad t \rightarrow \infty$$

*Prueba:* Sea la función de Lyapunov:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \{s^T H(q)s + \Delta\theta^T \Gamma^{-1} \Delta\theta\} \\ \dot{V} &= s^T H(q)\dot{s} + \Delta\theta^T \Gamma^{-1} (\hat{\dot{\theta}}) + \frac{1}{2} s^T \dot{H}(q)s \\ H(q)\dot{s} &= -\frac{1}{2} \dot{H}(q)s - S(q, \dot{q})s - Y_r \Delta\theta \\ \hat{\dot{\theta}} &= -\Gamma Y_r^T s \\ \Rightarrow \dot{V} &= -s^T Y_r \Delta\theta + \Delta\theta^T Y_r^T s - s^T K_d s \\ \therefore \dot{V} &= -s^T K_d s \end{aligned}$$

Por el teorema de Lyapunov, dado que

$$s = \Delta\dot{q} + \alpha \Delta q \in L_2,$$

y que si

$$x \in L_2, \dot{x} \in L_2 \Rightarrow x \rightarrow 0$$

entonces

$$\Delta q \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty$$

De la Ec. 15 en lazo cerrado con el control:

$$H(q)\dot{s} + \frac{1}{2} \dot{H}(q)s + S(q, \dot{q})s = Y_r \Delta\theta - K_d s$$

- i)  $H(q) > 0$
- ii)  $\dot{H}(q)$  está acotada.
- iii)  $S(q, \dot{q})$  está acotada.
- iv)  $K_d$  está acotada.

Para el término  $Y_r \Delta\theta$  sabemos que:

$$\begin{aligned} V &\in L_2 \text{ y } \dot{V} = \frac{1}{2} \{s^T H(q)s + \Delta\theta^T \Gamma^{-1} \Delta\theta\} \\ \Rightarrow \Delta\theta &\in L_2 \end{aligned}$$

De la ecuación de lazo cerrado con el control sabemos que  $\dot{s} \in L_2$ . Ahora dado que  $V$  es acotada por abajo, y empleando el teorema de Barbalath, bajo el criterio de Lyapunov tenemos que:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq 0 \\ \ddot{V} &= -2s^T K_d \dot{s} \\ \text{i) } s &\text{ es acotada} \\ \text{ii) } \dot{s} &\text{ es acotada} \\ \text{iii) } K_d &> 0 \\ \therefore \ddot{V} &\text{ existe y está acotada.} \\ \Rightarrow \dot{V} &= -s^T K_d s \rightarrow 0, \quad s \rightarrow 0 \end{aligned}$$

y como  $\Delta q \rightarrow 0$  y  $\Delta\dot{q} \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$

<sup>4</sup> que para el desarrollo se tomó como unitaria.



entonces:

$$q(t) \rightarrow q_d(t); \quad \dot{q}(t) \rightarrow \dot{q}_d(t)$$

teniendo como  $q_d$ , la trayectoria deseada.

### Caso Práctico

Para observar mejor el fenómeno expuesto anteriormente, se presenta el ejemplo de la simulación del comportamiento un robot manipulador rígido de 2 grados de libertad (Figura 1) bajo la acción de un control adaptable directo, cuya dinámica es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{11} \\ G_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

donde:

$$\begin{aligned} H_{11} &= m_1 * l_{c1} * l_{c1} + m_2 * (l_1 * l_1 + l_{c2} * l_{c2} + 2 * l_1 * l_{c2} * \cos(q_2)) + I_1 + I_2 \\ H_{12} &= m_2 * (l_{c2} * l_{c2} + l_1 * l_{c2} * \cos(q_2)) + I_2 \\ H_{21} &= H_{12} \\ H_{22} &= (m_2) * l_{c2} * l_{c2} + I_2 \\ C_{11} &= -m_2 * l_1 * l_{c2} * \text{sen}(q_2) * \dot{y}_2 \\ C_{12} &= -m_2 * l_1 * l_{c2} * \text{sen}(q_2) * (\dot{y}_2 + \dot{y}_1) \\ C_{21} &= m_2 * l_1 * l_{c2} * \text{sen}(q_2) * \dot{y}_1 \\ C_{22} &= 0 \end{aligned}$$

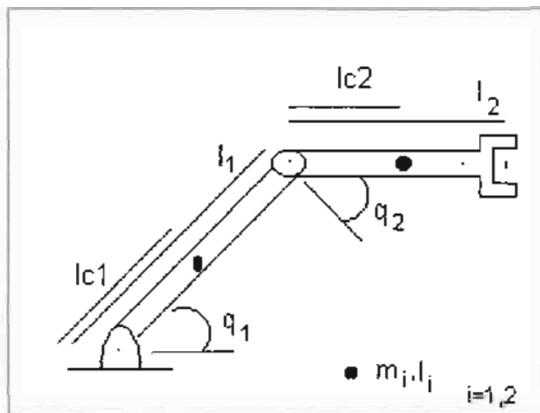


Figura 1. Robot Manipulador rígido de 2 grados de libertad con articulaciones rotacionales.

$$\begin{aligned} G_{11} &= (m_1 * l_{c1} + m_2 * l_1) * g * \cos(q_1) + m_2 * l_{c2} * g * \cos(q_1 + q_2) \\ G_{21} &= m_2 * l_{c2} * g * \cos(q_1 + q_2) \end{aligned}$$

siendo:

- $q_1$  y  $q_2$  las coordenadas generalizadas, dadas por la posición de las articulaciones rotacionales del robot manipulador;
- $\dot{y}_1$  y  $\dot{y}_2$  como las derivadas de primer orden de  $q_1$  y  $q_2$ ;
- $m_i$  y  $l_i$  es la masa y la longitud, respectivamente, del eslabón  $i$ -ésimo;
- $l_{c1}$  y  $l_{c2}$  son los momentos de inercia de los eslabones 1 y 2 respectivamente;
- $I_1$  y  $I_2$  son los momentos de inercia de los eslabones 1 y 2 respectivamente.

Parametrizando el sistema anterior nos queda que:

$$\begin{aligned} Y_r &= \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} \\ Y_1 &= \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 & \ddot{q}_1 & \ddot{q}_1 & \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 & z & \ddot{q}_1 & u & u & v \end{bmatrix} \\ z &= 2\cos(q_2)\ddot{q}_1 + \cos(q_2)\ddot{q}_2 - 2\text{sen}(q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 + \text{sen}(q_2)\dot{q}_2^2 \\ u &= g\cos(q_1) \\ v &= g\cos(q_1 + q_2) \\ Y_2 &= \begin{bmatrix} 0 & \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 & 0 & \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 & a & 0 & 0 & 0 & v \end{bmatrix} \\ a &= \cos(q_2)\ddot{q}_1 + \text{sen}(q_2)\dot{q}_1^2 \\ \theta^r &= [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \theta_4 \quad \theta_5 \quad \theta_6 \quad \theta_7 \quad \theta_8 \quad \theta_9] \\ \theta_1 &= l_1 & \theta_2 &= I_2 \\ \theta_3 &= m_1 l_{c1}^2 & \theta_4 &= m_2 l_{c2}^2 \\ \theta_5 &= m_2 l_1 l_{c2} & \theta_6 &= m_2 l_1^2 \\ \theta_7 &= m_1 l_{c1} & \theta_8 &= m_2 l_1 \\ \theta_9 &= m_2 l_{c2} \end{aligned}$$

Teniendo como valores de la estructura mecánica los siguientes:

$I_1=0.9 \text{ Kgm}^2$	$I_2=0.25 \text{ Kgm}^2$
$m_1=12 \text{ Kg.}$	$m_2=7 \text{ Kg}$
$l_1=0.53 \text{ m}$	$l_2=0.38 \text{ m}$
$l_{c1}=0.33$	$l_{c2}=0.16$
$g= 9.81\text{m/s}^2$	

Se desea observar el seguimiento de una trayectoria dada por  $q_{d1} = q_{d2} = 5*\text{sen}(t)$ , para ambas articulaciones, teniendo un tiempo de simulación de 4 seg.

Podemos observar que en la figura 2(a) y (b) el desempeño del control al seguimiento de la trayectoria deseada tanto en la articulación 1 como en la articulación 2, apreciando la convergencia de las trayectorias en un tiempo considerablemente bueno.

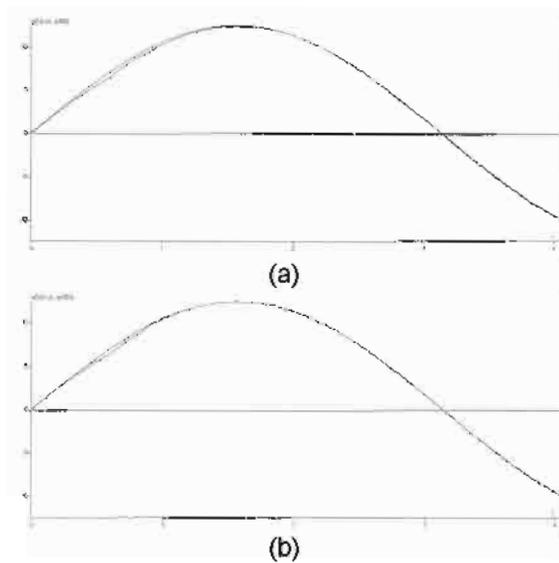


Figura 2. Comportamiento de las trayectorias de posición de articulaciones (a) 1 y (b) 2, bajo el controlador.

En la figura 3 (a) y (b) encontramos el error de seguimiento, el cual, como se puede observar, tiende a una vecindad muy cercana a cero, por lo que se comprueba que el error de seguimiento tiende a cero para  $t \rightarrow \infty$ .

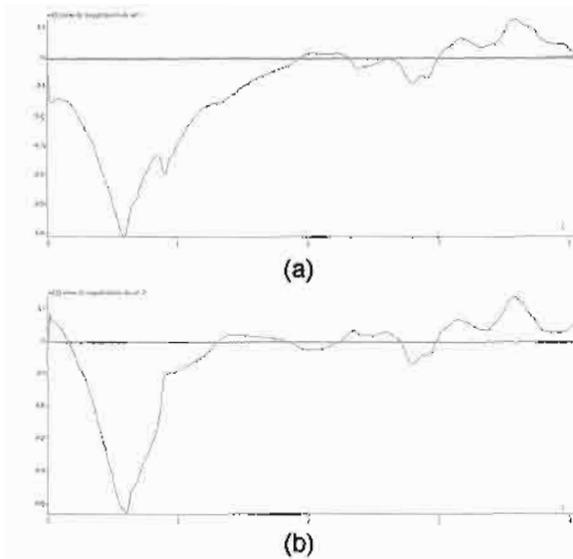


Fig. 3 Comportamiento del error de posición de las articulaciones (a)1 y (b) 2, bajo la acción del controlador.

En la figura 4(a) y (b) encontramos el comportamiento del controlador adaptable, el cual, inyecta gran cantidad de energía en los primeros instantes, para después tener un comportamiento asintótico a cero, al alcanzar la trayectoria deseada.

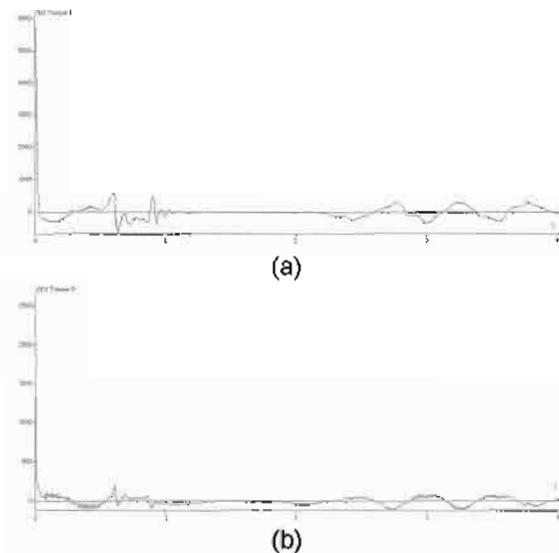


Fig. 4 Comportamiento de los torques de control para las articulaciones (a) 1 y (b) 2, del manipulador.



En la figura 5(a), (b) y (c) se muestra la identificación de los parámetros  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_6$ ; donde se puede apreciar que después de un cierto instante de tiempo, estos parámetros convergen a un valor acotado.

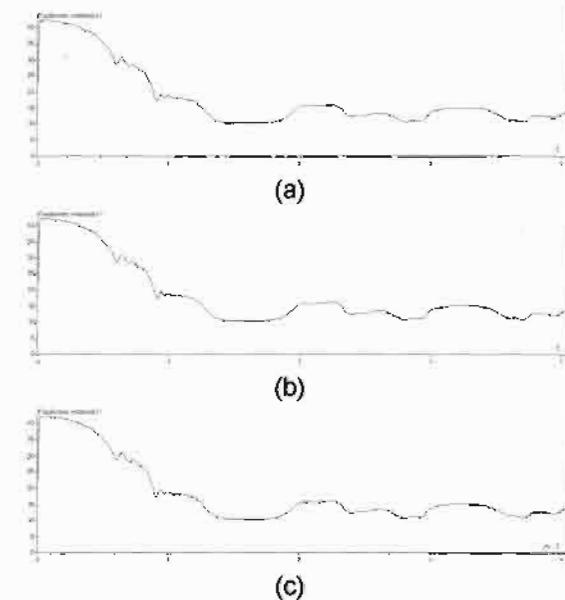


Fig. 5 Estimación de los parámetros (a)  $\theta_1$ , (b)  $\theta_4$  y (c)  $\theta_6$  del vector de parámetros.

## CONCLUSIONES

Además de los beneficios que se expresaron con anterioridad a lo largo del desarrollo, podemos recapitular la información y decir que este control resulta bastante eficiente, pues permite mantener la estabilidad del sistema, ante incertidumbres dentro de los parámetros de la dinámica del manipulador; mas aún, si por la misma actividad de la tarea a realizar por parte del manipulador se encontrara con variaciones en algún parámetro (ej. al cargar un objeto el centro de masa del eslabón que contiene al punto terminal o la pinza cambia su valor) o en el caso de dinámicas no modeladas, permite el ajuste en línea sin necesidad de rediseñar el controlador para el sistema.

Por otra parte observa la ventaja del diseño a partir del criterio de Lyapunov, pues garantiza la estabilidad del sistema, y en este caso en

particular, garantiza la estabilidad asintótica del sistema en lazo cerrado.

## REFERENCIAS

1. Ortega R., Spong. *Adaptive Motion Control of Rigid Robots: a Tutorial*. Automatica 25 (6), 1989, 877-888.
2. Desoer C, Vidyasagar M., *Feedback Systems, Input-Output Properties*. Academic Press N.Y., 1975.
3. Lewis L. *Control of robot Manipulators* MacMillan Publishing Co. N.Y., 1993.
4. Narendra K. *Satble Adaptive Systems* Prentice Hall New Jersey, 1989.