



---

---

## MORFOGÉNESIS UTILIZANDO REDES NEURONALES CELULARES

Alejandro Flores Méndez y Eduardo Gómez Ramírez  
Laboratorio del Centro de Investigación, Universidad La Salle.

### RESUMEN

Desde la antigüedad el hombre ha buscado entender el comportamiento de la naturaleza utilizando algoritmos o procedimientos matemáticos que simulen características muy específicas de organismos biológicos. Ejemplos de esto son el número áureo, el número omega, y características de tipo fractal, dinámica caótica, autómatas celulares, etc.

Otro de los algoritmos que han demostrado gran capacidad para generar patrones biológicos son las redes neuronales celulares. En este trabajo se presenta una breve introducción de varios algoritmos que se han utilizado en el proceso de generación de patrones biológicos y el procedimiento necesario para morfogénesis utilizando redes neuronales celulares. Se presentan varios ejemplos descriptivos.

### ABSTRACT

Since ancient times the human being has tried to understand the behavior of the nature using algorithms or mathematical procedures that simulate very specific characteristics of biological organisms. Some examples are the golden ratio, the omega number, and fractal characteristics, chaotic dynamics, cellular automata, and so far.

Another algorithms that show great capacity for generating biological patterns are Cellular Neural Networks (CNN). In this work we present a brief introduction of several algorithms used in the process of making biological patterns and the necessary steps for achieving morphogenesis using CNN. Some descriptive examples are presented in this work.

### INTRODUCCIÓN

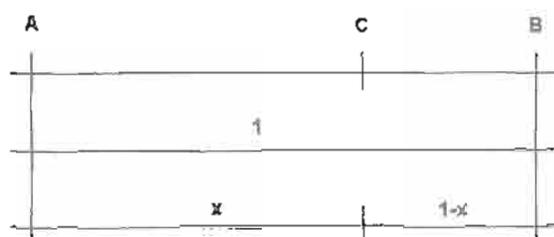
La historia matemática de la simulación y entendimiento de procesos biológicos se remonta a la época de los griegos con el número áureo y han existido diferentes aproximaciones hasta nuestros días. Las concepciones de la naturaleza se han modificado y ha sido tal el desarrollo que en los últimos años se ha estado utilizando el término de *Nueva Física* al reciente enfoque para describir estos problemas. En este artículo se han seleccionado algunos de los temas más trascendentes para la explicación de la naturaleza, específicamente en la formación de patrones biológicos. Se inicia con la proporción áurea y algunos comportamientos numéricos interesantes, posteriormente se analizan algunos tipos de fractales; en la siguiente

sección se muestra la simulación de un sistema físico con autómatas celulares y, por último se presentan algunos ejemplos utilizando un algoritmo de reciente creación: las Redes Neuronales Celulares (1), (2).

### NÚMERO ÁUREO

Uno de los primeros intentos por entender y simular el comportamiento de la naturaleza, fue el número áureo (3), (4). El número áureo fue definido por el arquitecto romano Marco Lucio Vitrovio Polión en el siglo I d.C. de la siguiente forma:

*Definición 1:* Se propone un segmento AB que tenga una longitud unitaria, sea C el punto de división:



donde:

longitud  $AB = 1$

parte mayor  $= AC = x$

parte menor  $= CB = 1-x$

De aquí se establece la siguiente proporción

$$\frac{\text{parte menor}}{\text{parte mayor}} = \frac{\text{parte mayor}}{\text{toda la recta}}$$

$$\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1} \quad (\text{Ec. 1})$$

con lo cual se obtiene la ecuación  $x^2 + x - 1 = 0$ , cuyas raíces son  $x_1 = 0.6180$   $x_2 = -1.6180$ .

La primera raíz se define como **número áureo** y la segunda (en valor absoluto) a su inverso.

Este número tiene un comportamiento algebraico muy interesante, la parte decimal del número áureo y de su inverso son exactamente la misma.

Desde esta época se encontró que este número aparecía en diferentes situaciones en la naturaleza y las matemáticas. Algunos ejemplos han sido descritos en y se muestran a continuación.

#### El rectángulo áureo.

El rectángulo áureo (Fig. 1), base de construcción de todas las figuras armoniosas, está sustentado en un cuadrado cualquiera en el que se toma el punto medio de lados opuestos. Al unir estos puntos medios se forman dos rectángulos idénticos. A uno de ellos se le traza una diagonal, a partir de la cual se dibuja un segmento de circunferencia hasta

la prolongación de la base del cuadrado. Así el rectángulo tendrá como dimensiones un largo igual a la suma de la diagonal mencionada con la mitad de lado del cuadrado y, por ancho la medida del lado del cuadrado. Si se emplea el teorema de Pitágoras, se puede demostrar que la razón entre la altura (ancho) y la base (largo) del rectángulo es la razón áurea. Una vez construido el rectángulo áureo podemos descomponerlo en un cuadrado y en un rectángulo áureo menor, al cual podemos dividir de la misma forma, y así indefinidamente. Apoyados en el vértice de cada cuadrado trazamos un cuarto de circunferencia de radio coincidente con el lado del cuadrado de tal manera que todos los trazos se enlacen para formar una sola curva que se conoce como espiral de Arquímedes, o espiral áurea (Fig. 2).

Esta espiral se presenta en los cuernos, garras y colmillos de algunos animales, como es el caso de la cabra montañesa o los borregos cimarrones, y en otros de formas

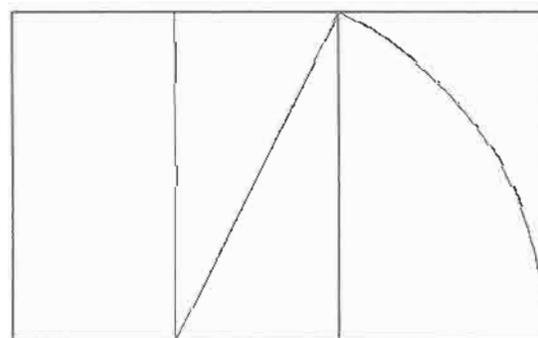


Figura 1. Rectángulo Áureo.

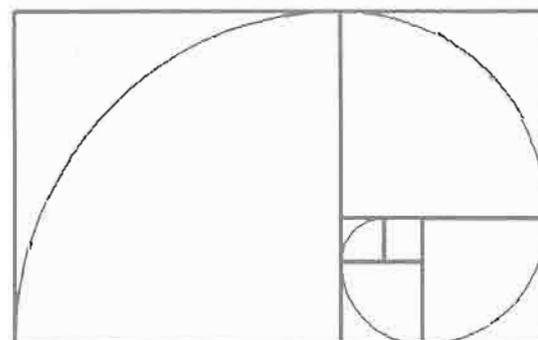


Figura 2. Espiral Áurea.

largas con menor curvatura como en el caso de los colmillos de los elefantes y en la concha del nautilus (5).

### La estrella pitagórica

Es una estrella regular de cinco puntas, inscrita en un pentágono regular ABCDE equilátero y equiángulo (Fig. 3). Se le dio el nombre de estrella pitagórica ya que se cree que esta figura cautivó a la secta de los pitagóricos por sus propiedades geométricas y decidieron elegirla como un símbolo distintivo de la hermandad. Como en el corazón de la estrella pitagórica se encuentra otro pentágono regular, resulta posible la construcción de una sucesión anidada de estrellas pitagóricas concéntricas

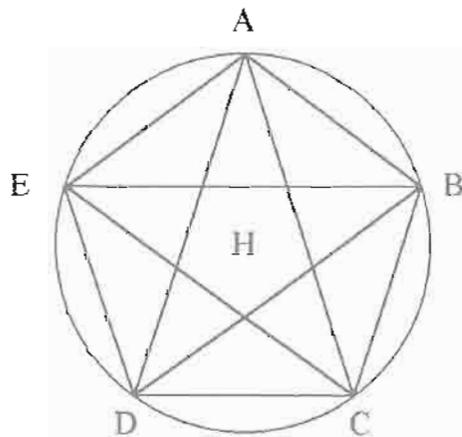


Figura 3. Estrella pitagórica.

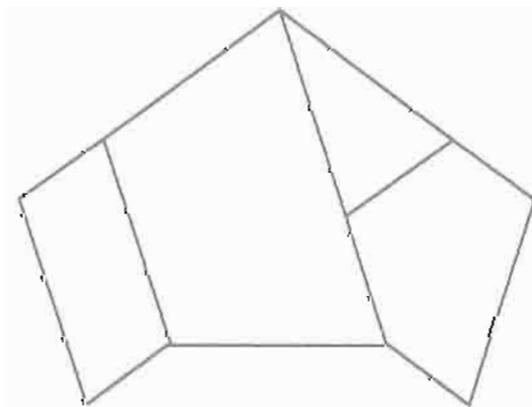


Figura 4. Nudo Áureo.

que, por pares, estén colocadas en forma invertida. Este pentágono puede ser elaborado con una tira de papel haciendo un nudo sencillo y aplanando cuidadosamente. A este mecanismo se puede referir como la creación de un nudo áureo, donde los dobleces muestran a las diagonales sucesivas cortándose en extrema y media razón (Fig. 4).

Este comportamiento se ha encontrado en los números de Fibonacci, en la disposición de las hojas en el tallo de una planta, en los botones o centros de algunas flores, como los girasoles y las margaritas y en varios sólidos como el dodecaedro y el icosaedro, por mencionar algunos. Muchos escritores, artistas y arquitectos han dedicado obras o de alguna forma asignado proporciones.

Existen otros sistemas en los cuales se ha encontrado bajo ciertas características como son: el comportamiento dinámico de sistemas mecánicos y la mecánica de suelos (6).

A pesar de que durante mucho tiempo se sostuvo y se buscó si el número áureo formaba parte del comportamiento de la naturaleza, en las últimas décadas se han encontrado otras formas de describir el comportamiento de otros patrones biológicos, como son los fractales.

### FRACTALES

Los trabajos de Mandelbrot que describían la existencia de cierta geometría en la Naturaleza, determinaron una nueva forma de ver las formas y estructuras de varios organismos. Ejemplos de esto son la estructura de nubes y arrecifes, patrones de piel y estructuras simples que se autoorganizan para formar estructuras más complicadas (estructuras fractales), turbulencias y dinámicas que se les denominaba *casi aleatorias*, y en las cuales se ha encontrado un cierto tipo de *orden*.

A partir de estos trabajos ha habido una gran cantidad de desarrollos y herramientas utilizando la idea de fractalidad. Es decir, es más sencillo almacenar la regla local que genera el patrón, que almacenarlo todo. Esta idea ha sido una herramienta muy útil en la compresión y procesamiento de imágenes.

Esta idea de fractalidad ha sido también muy utilizada para la generación de patrones



biológicos. En la siguiente sección se hace una pequeña descripción de esto en relación con la evolución de plantas.

## FRACTALES EN LA EVOLUCIÓN DE LAS PLANTAS

La idea de geometría fractal ha dado una nueva herramienta a los biólogos para modelar la compleja dinámica que existe entre los organismos y su medio para poder probar sus hipótesis sobre la evolución y su comportamiento. Una de las áreas donde la computadora se ha utilizado como herramienta para probar estas hipótesis es en la evolución de las plantas (Fig. 5). Esta idea se basa en que la evolución es manipulada por la necesidad de la planta para minimizar los mecanismos requeridos en el aprovechamiento de la luz solar en un crecimiento vertical. Existen otras hipótesis con respecto a la forma en que se reproducen y como colocar sus semillas, o polen (7).

Estas ideas se combinan con ciertos valores de probabilidad para generar la diversidad biológica.

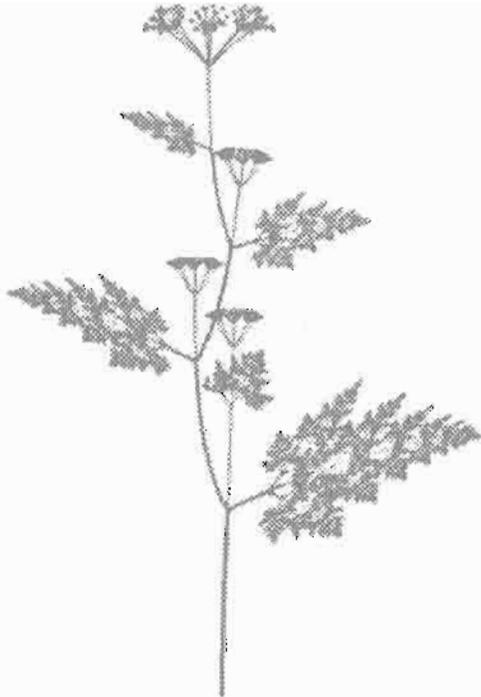


Figura 5. Planta obtenida mediante reglas fractales.

Las simulaciones que se obtienen son verificadas utilizando el registro de fósiles. Cabe hacer notar que la verificación no implica una comprobación, sólo un camino para entender las formas generadas por la naturaleza.

## AUTÓMATAS CELULARES

La idea de autómatas celulares (AC) fue presentada por Von Neuman hacia finales de los cuarenta (8), y actualmente es un paradigma de la computación paralela.

Los AC se definen como un arreglo de celdas que cumplen principalmente con tres características:

- son *homogéneas* (las celdas utilizan la misma regla),
- *emplean reglas locales* (sólo interactúan con sus 'vecinos'; ver Fig. 6), y
- son *paralelas* (el nuevo estado de todas las celdas se calcula a un mismo tiempo).

Existen aplicaciones de AC (9) en diversas áreas tales como:

- simulación de la conducción del calor en un fluido,
- simulación de la respuesta inmune,
- simulación de la turbulencia química,
- procesamiento de imágenes,
- teoría de la computación,
- simulación de procesos de morfogénesis (ver Fig. 8), etc.;

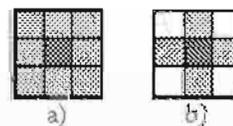
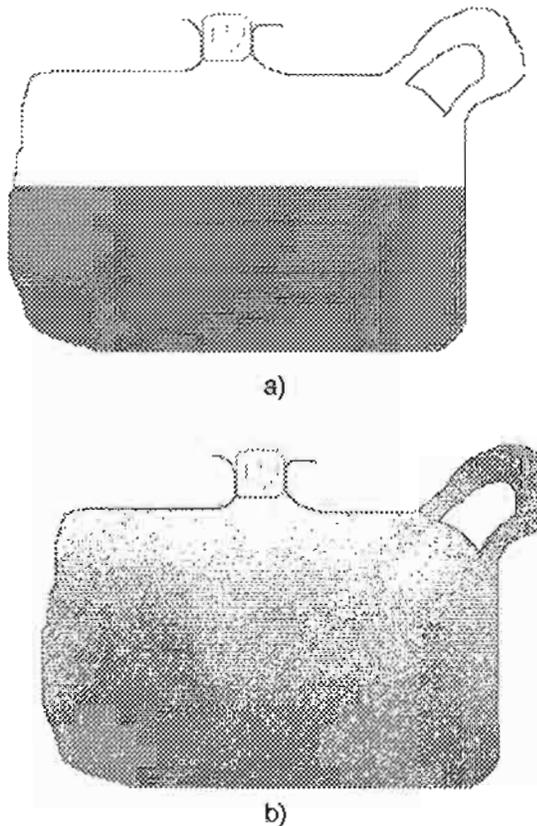


Figura 6. Vecinos de una celda (central) compuestos por a) ocho vecinos (convencional u ocho conectado) y b) por cuatro vecinos (vecindad de Laplace).

Un ejemplo de AC para la simulación de las moléculas de agua dentro de una tetera se muestra en la Fig. 7; las reglas de los AC son reglas lógicas, como la que permite la simulación de la tetera; la dinámica de ésta se obtiene mediante las siguientes condiciones:

*si es pared*  
*la celda no cambia*  
*sino*  
*calcula el número de colisiones*  
*calcula las paredes que hay alrededor*  
*si hay pared*  
*rebota*  
*sino si rebota contra una partícula*  
*cambia su dirección al sentido opuesto*  
*sino (no hay nada en su camino)*  
*continúa en la misma dirección*  
*fin*



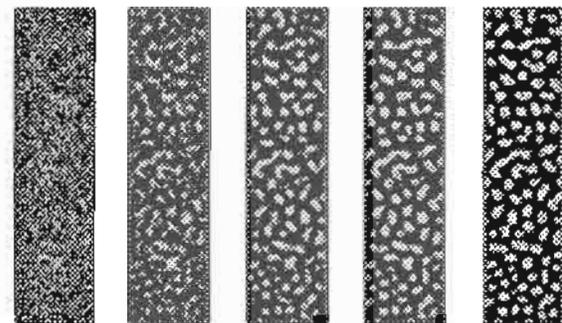
**Figura 7.** Modelado de la distribución de partículas en un recipiente mediante un AC. La figura a) muestra las condiciones iniciales mientras que la figura b) indica como evoluciona el sistema.

Otro ejemplo de la utilización de los AC se puede observar en la Fig. 8 la cual muestra la evolución de un espacio con una entrada aleatoria hasta la eventual formación de patrones que describen la piel de algunos seres vivos. Además de mostrar una extraordinaria semejanza con los patrones que se pueden observar en condiciones naturales es también empleada como base en teoría de la evolución. En la Fig. 8 los patrones que se observan de izquierda a derecha además de ser pasos subsecuentes en el AC también lo son en la evolución de los seres vivos ya que la segunda imagen de izquierda a derecha se observa en peces, la siguiente en anfibios y finalmente la figura de la derecha es fácilmente asociada con las pieles de los felinos, ej.: leopardos.

En general un autómatas celular puede realizar cualquier tarea capaz de definirse mediante reglas lógicas siempre y cuando su estructura sea regular.

#### REDES NEURONALES CELULARES

Las Redes Neuronales Celulares (RNC) son un tema que actualmente ha sido muy estudiado debido a su capacidad para el procesamiento de imágenes, la facilidad con que se puede aplicar en circuitos eléctricos y la pequeña cantidad de parámetros que se deben determinar (para la mayoría de las aplicaciones basta con 19 parámetros) la cual no varía con las dimensiones del espacio que se analice.



**Figura 8.** Evolución de un AC donde se puede observar una eventual agrupación de los elementos en el sistema hasta que se llega a encontrar un patrón bien definido (imagen de la extrema derecha), el cual se observa en las pieles de ciertos mamíferos.



Las RNC fueron creadas en 1987 por el Profesor Leon O. Chua y para 1990, gracias a una muy buena aceptación por parte de la comunidad científica, se le dedicó un congreso bianual (**Congreso Internacional de RNC y sus Aplicaciones**) que recoge los trabajos realizados tanto en desarrollos a nivel teórico así como los avances obtenidos en diferentes aplicaciones tales como: procesamiento de imágenes (10), simulación de modelos complejos en biología (11), sistemas no lineales, etc., encriptación de datos (12), realización de RNC en circuitos y computadoras (13), (14), etc.

La base de las RNC se sustenta fundamentalmente en dos pilares: las **Redes Neuronales Artificiales (RNA)** y los **Autómatas Celulares (AC)**.

Básicamente una RNC puede ser descrita como arreglos  $n$ -dimensionales de elementos simples llamados celdas (unidad básica de una RNC) cuya dinámica es *no lineal* y que trabaja mediante reglas de *nivel local*.

El nivel local se refiere a que la regla hace uso de una **vecindad** finita definida por la siguiente ecuación:

$$N_r(i, j) = \left\{ C(k, l) \mid \max\{|k-i|, |l-j|\} \leq r, \right. \\ \left. l \leq k \leq M; l \leq l \leq N \right\} \quad (\text{Ec. 2})$$

Ejemplos de diferentes tipos de vecindad se pueden observar en la Fig. 9 la cual muestra una vecindad para  $r = 1$  (a) y  $r = 2$  (b)

La dinámica de una RNC se obtiene mediante el siguiente conjunto de ecuaciones:

Ecuación de estado:

$$\frac{dx_y(t)}{dt} = -x_y(t) + \sum_{C(k,l) \in N_r(i,j)} A(i, j; k, l) y_B(t) \\ + \sum_{C(k,l) \in N_r(i,j)} B(i, j; k, l) u_k + I \quad (\text{Ec. 3})$$

Ecuación de salida:

$$y_y(t) = \frac{I}{2} \left( |x_y(t) + I| - |x_y(t) - I| \right) \quad (\text{Ec. 4})$$

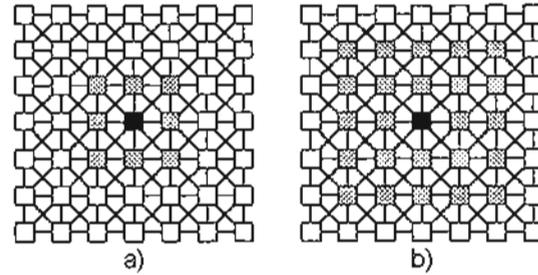


Figura 9. Diferentes tipos de vecindades dependientes del valor de  $r$ . La figura a) muestra la vecindad de una celda (denotada por el color negro) en el cual  $r = 1$ . Nótese que la distancia máxima entre la celda central y sus vecinas (celdas grises) no es mayor que 1. La figura b) hace referencia a una vecindad donde  $r = 2$ .

Ecuación de entrada:

$$u_{ij} = E_{ij}, \quad (\text{Ec. 5})$$

Existen algunos otros modelos para los cuales se puede emplear una extensión de una RNC la cual hace uso de más de una capa, éste se conoce como RNC multicapa, pero para su mayor estudio al respecto se sugiere la lectura de (1) y (15).

## MORFOGÉNESIS UTILIZANDO REDES NEURONALES CELULARES

El término **morfogénesis** se emplea para referirse al desarrollo evolutivo de la estructura de un organismo o parte. En cuanto al modelado de sistemas biológicos se han hecho ya algunos trabajos en RNC (10), (16).

Una de las principales áreas de interés se encuentran en los modelos que describen la formación de patrones observados en algunos mamíferos, particularmente en las pieles de algunos felinos, esto debido a que en el caso particular del leopardo o el jaguar se presentan características que son interesantes en cuanto a los diversos comportamientos que se observan.



Uno de los modelos más aceptados en la actualidad para lo que es el modelado de patrones biológicos es el de reacción-difusión, también conocido como el sistema Gierer-Meinhardt (17) descrito por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= F(A, B) + D_A \nabla^2 A \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= G(A, B) + D_B \nabla^2 B \end{aligned} \quad (\text{Ec. 6})$$

Para la ecuación 6 A y B son concentraciones químicas de los llamados activador e inhibidor respectivamente, F(·) y G(·) son funciones no lineales y D<sub>A</sub> y D<sub>B</sub> son los coeficientes de difusión. De éstos, el activador crea la inestabilidad que permite la formación de patrones, mientras que el inhibidor aporta la estabilidad al sistema una vez que el patrón ha sido creado. Ambos químicos se difunden a través del espacio, pero si se ha de estabilizar el sistema es necesario que el inhibidor se difunda mucho más rápido que el activador (D<sub>A</sub> >> D<sub>B</sub>).

El modelo de Gierer-Meinhardt se puede llevar a cabo en una RNC mediante una simple consideración; puesto que el modelo es una ecuación de segundo orden y las RNC son sólo de primer orden, se deben obtener los valores de las mascarillas de manera que permitan tanto la inhibición como la excitación. Esto se consigue a través de un aumento en el tamaño de la vecindad, con lo que se puede dar valores positivos a las celdas contiguas a la que se está analizando, lo que permite su excitación, mientras que se le inhibe con los vecinos que estén a una distancia de dos celdas. Es gracias a esto que se obtiene la interacción de los dos elementos necesarios para la aparición de formas buscadas.

Como ya fue mencionado, algunos de los patrones más interesantes se presentan en las pieles de los felinos y, en particular en los leopardos, puesto que presentan diferentes comportamientos. Esto debido a que son "sensibles" a la estructura del cuerpo que se analiza. En otras palabras cuando uno observa la cola de un felino comúnmente puede observar manchas en uno de los extremos de la cola, mientras que en la parte terminal de ésta las manchas pasan a ser anillos. Este

mismo comportamiento se puede obtener cuando se varían los parámetros en función del espacio, sin embargo, esto no es tan plausible puesto que sería equivalente biológicamente a decir que sólo algunas porciones del cuerpo se verían afectadas por algún fenómeno externo.

Para el caso general de una RNC los parámetros son invariantes en el espacio y el tiempo, sin embargo, se pueden exhibir distintos comportamientos por el hecho de que la estructura que se está analizando no es igual en todas sus porciones; esto es, regresando al ejemplo de la cola, que el diámetro de ésta se reduce conforme se acerca al extremo final.

Así que se considera que el espacio que se está analizando tiene una geometría como la de una cola, la cual reduce su diámetro según se acerca a la punta y se emplea una RNC cuya regla está dada por las siguientes mascarillas:

$$A = \begin{bmatrix} -0.25 & -1 & -1.5 & -1 & -0.25 \\ -1 & 2.5 & 7 & 2.5 & -1 \\ -1.5 & 7 & -23.25 & 7 & -1.5 \\ -1 & 2.5 & 7 & 2.5 & -1 \\ -0.25 & -1 & -1.5 & -1 & -0.25 \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 7})$$

$$B = 0, \quad I = -0.7$$

Como condición inicial se da a la RNC valores aleatorios de entrada con una distribución uniforme entre -0.1 y 0.1 (Fig. 10.a).

$$|X(0)| \leq 0.1 \quad (\text{Ec. 8})$$

En realidad ésta no es una restricción muy fuerte ya que en la naturaleza es común observar en el momento del nacimiento cómo un ser tiene aproximadamente el mismo color para la mayor parte de su cuerpo.

Además considerando esta entrada aleatoria se podrán obtener una infinidad de patrones, inclusive en presencia de pequeñas variaciones (compare las Fig. 10.b y 10.c), pero éstos continuarán presentando el mismo comportamiento que es precisamente lo que se

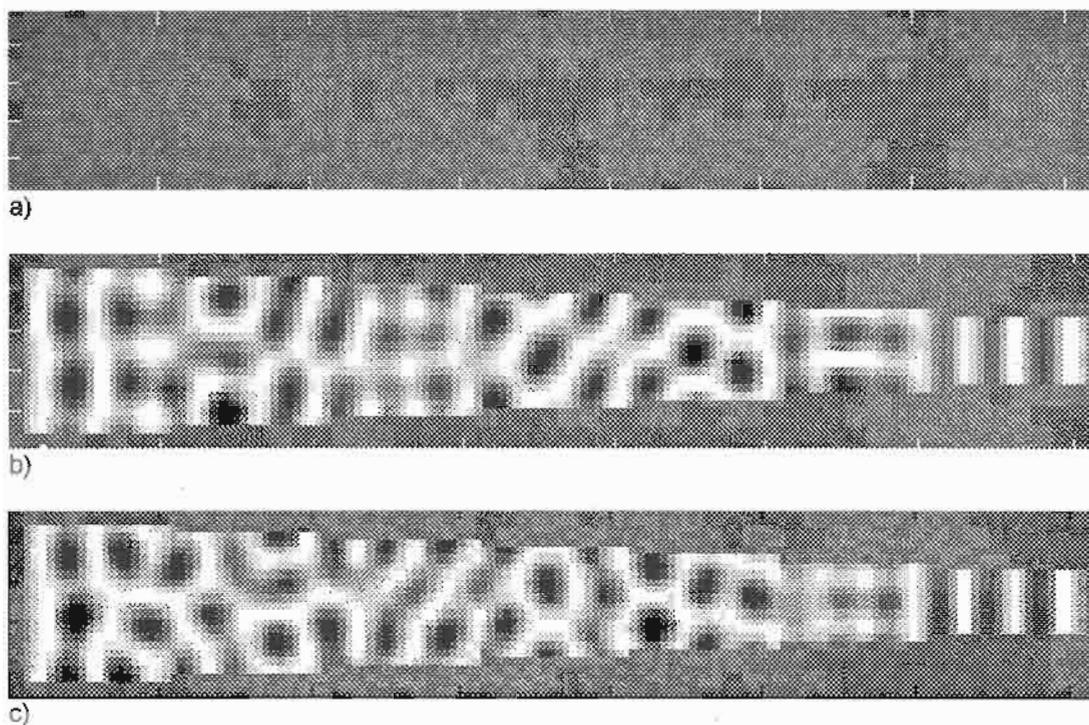


Figura 10. a) Entrada a una RNC para el modelado de la cola de un leopardo. Los valores presentados tienen una distribución uniforme con valores entre -0.1 y 0.1. b) resultado de una RNC empleando (7); nótese como a pesar de que se utiliza una misma regla para todas las celdas se pueden distinguir varios comportamientos gracias a que la estructura del cuerpo no es la misma para todas sus porciones.

distingue del análisis visual de las pieles de los felinos.

Si bien la entrada mostrada en la Fig. 10.a se ve como un área rectangular, en realidad la porción con la que se trabaja de ésta no es todo, sino que se emplean 7 RNC conectados entre sí cuyas dimensiones son  $M = 20$  y  $N = \{20, 18, 16, 14, 12, 10, 8\}$ . La salida obtenida utilizando la ecuación 7 se puede observar en la Fig. 10.b aquí el comportamiento de la RNC se ve afectado debido a que las dimensiones no son iguales, por lo que en un extremo se distinguen manchas mientras que en la punta se ven anillos. Esto se debe a que son "sensibles", como ya se mencionó anteriormente, a la estructura del cuerpo que se analiza (manchas en uno de los extremos de la cola y anillos en la parte terminal de ésta). Además si se da una nueva entrada a la red con las mismas características se obtiene un patrón completamente diferente como se puede observar en la Fig. 10.c.

## CONCLUSIONES

El esfuerzo del hombre por imitar el comportamiento de la naturaleza le ha permitido desarrollar una gran cantidad de herramientas matemáticas. Como se puede observar los modelos que mayor impacto han tenido, son aquellos que están definidos por reglas locales y no por un modelo matemático global. A pesar de la potencialidad que han demostrado, todavía no existen algoritmos generales para obtener comportamientos globales a partir de reglas locales, aunque los resultados presentados muestran un gran avance en este camino.

Las RNC permiten con tan sólo el empleo de reglas locales y a partir de condiciones que se considerarían en otro caso como ruido, la obtención de modelos sumamente complejos que en este caso permiten la simulación de seres vivos gracias a la interacción de los valores de sus vecinos. Con esto se consigue



una cierta forma de agrupación, la cual visualmente puede ser interpretada como patrones.

Se puede concluir además que un sistema local no tiene por qué comportarse forzosamente de manera similar en todas las porciones de la estructura que se está analizando, esto es claro tras la simple observación de los resultados ofrecidos.

Las RNC son, pues, una nueva alternativa además de los métodos ya existentes que tratan de alguna manera de descifrar los procesos que describen el origen de la vida y las formas que ésta presenta, ofreciendo así una nueva perspectiva para admirar lo maravilloso que es todo lo que nos rodea a pesar de lo simple que pueden ser las reglas que lo originan.

#### REFERENCIAS

1. Chua L. O. y Yang L., Cellular neural networks: theory, IEEE Trans. Circuits and Systems, CAS-35, 1257-1272 (1988).
2. Chua L. O. y Yang L., Cellular neural networks: applications, IEEE Trans. Circuits and Systems, CAS-35, 1273-1290 (1988).
3. Berumen G. E., *Proporción áurea, Mathematica*, boletín del Departamento de Matemáticas la Escuela de Ingeniería de la Universidad la Salle, Enero 1996.
4. Berumen G. E., *Proporción áurea, Mathematica*, boletín del Departamento de Matemáticas la Escuela de Ingeniería de la Universidad la Salle, Febrero 1996.
5. Ghyka M., *The geometry of art and life*, Dover, 1977.
6. Cuevas Barajas L., La proporción áurea en la naturaleza, Investigación, Revista de Divulgación de Investigación en ULSA, diciembre 1990.
7. Niklas, K. J., Computer-simulated Plant Evolution, Scientific American, marzo 1986.
8. von Neumann J., *Theory of Self-reproducing Automata*, (editado y complementado por A. W. Burks), University of Illinois Press, 1966.
9. Toffoli T. y Margolus N., *Cellular Automata Machines*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1987.
10. Crouse K. R. y Chua L. O., Methods for Image Processing and Pattern Formation in Cellular Neural Networks, IEEE Transactions on Circuits and Systems-I, 42 (10):583-601, Octubre 1995.
11. Ogorzalek M. J., Z. Galias, A. Dabrowski y W. Dabrowski, "CNN with Chaotic Elements for Modelling Biological Functions", Proc. IEEE CNNA-96, pp. 279-284, 1996.
12. Caponetto R., Lavorgna M. & Occhipinti L., "Cellular Neural Networks in Secure Transmission Applications", Proc. IEEE CNNA-96, pp. 445-450, 1996.
13. Gómez Ramírez E., Ramos Viterbo V., Alencastre Miranda M., Flores Méndez A. y Sánchez de Tagle A., "Implementation of a Cellular Neural Network over an Optical Computer", Proc. IEEE CNNA-96, pp. 445-450, 1996.
14. O'Sullivan G., Horan P., Hegarty J., Kakizaki S., Kelly B. y McCabe E., "A Fully Optically Addressable Connected Component Detector in CMOS", Proc. IEEE CNNA-96, pp. 445-450, 1996.
15. Kozek T., Roska T. & Chua L. O., Genetic algorithm for CNN template learning, IEEE Trans. Circuits and Systems, CAS-40, 1993.
16. Setti G. & Thiran P., "Biological Pattern Formation with Cellular Neural Networks", Proc. IEEE CNNA-96, pp. 279-284, 1996.
17. Meindhart H., *Models of Biological Pattern Formation*, Academic Press, Londres, 1982.