EL PROBLEMA MATEMÁTICO DE LA REPRESENTACIÓN DE INFORMACIÓN EN LA TEORÍA DE LOS SISTEMAS CONEXIONISTAS

Esther Vargas Medina[1] y Mauricio Romero-Bastida[2]
[1]Esc. de C. de la Educación, Universidad La Salle
[2]Depto. de Física, UAM-Iztapalapa

RESUMEN

El cambio substancial que está ocurriendo en computación tiene su origen por un lado, en el empleo de computadoras paralelas y por el otro, en la utilización de ciertas ideas de la Neurofisiología y la Psicología Experimental. Esto ha "creado" un nuevo paradigma en la computación contemporánea, que se resume en la construcción de una clase de computadoras conocidas como "Sistemas Conexionistas" (SC), "Redes Neuronales" (RN) o "Neurocomputadoras", que permiten resolver una cantidad inusitada de problemas.

En este trabajo se analiza la posibilidad de encontrar un fundamento teórico de estos SC, aspecto de vital importancia para el desarrollo futuro de esta disciplina. Presentamos una breve exploración sobre el estado actual del teorema de Kolmogorov, que en general se refiere al mapeo de funciones, y se analiza su viabilidad como un posible fundamento abstracto de estos sistemas. Asimismo, se sugiere que algunas partes substanciales de la Neurocomputación, se basan en datos experimentales obtenidos en humanos -con procedimientos psicofísicos modernos-; esos formalismos y datos, fundamentan en forma clara la teoría de representación matemática de Kolmogorov aplicada a la Neurocomputación.

ABSTRACT

The substantial change that is happening in computing has its source in one hand, in the parallel computers employ, and on the other hand, in the use of certain kinds of ideas from the neurophysiology and experimental psychology. Therefore a new computing paradigm has been "created", which is based on the construction of a type of computers known as "Conexionist Systems" (CS), "Neural Networks" (NN) or "Neurocomputers", which allows to resolve an amazing amount of problems.

In the current studies, the possibility to found a theorical foundation of these CS is analyzed. We show a brief analysis of the nowadays state of the Kolmogorov theorem, which in general it relates with the functions mapping; its viability as an abstract foundation of these systems is also analyzed. Besides, it is suggested that some substantial parts of Neurocomputing are based on experimental data obtained in human -with modern psicophysic process-; these formalisms and data establish in a clearly way the mathematical representation of Kolmogorov apply to Neurocomputing.

INTRODUCCIÓN

Un problema central contemporáneo en el estudio de los SC, es encontrar la relación entre los formalismos utilizados y una teoría general neuro-computacional; trabajos recientes como el de Amit (1) plantean que la base de la neuro-computación se encuentra en la Mecánica Estadística; otros autores, como Hecht-Nielsen (2, 3), sugieren que hay una forma teórica más general y poderosa y que este fundamento se encuentra en la teoría matemática del mapeo de funciones, presentada por el gran matemático Hilbert en 1901 (4), en el cual se pregunta si existe una función general que represente a otras funciones generales. Kolmogorov (5) y otros, en los años 50's respondieron que sí, con ciertas limitaciones. Si esto es cierto, entonces ciertos formalismos de representación en redes, se basan en esas "funciones de funciones".

Sin embargo, la pregunta que queda es: ¿Cuáles son las funciones en que se basa la adquisición de información en humanos? y si ¿éstas pueden ser mapeadas por una sola superfunción tipo Hilbert-Kolmogorov?

Para contextualizar más la propuesta de este trabajo, es conveniente mencionar los aspectos básicos de los SC, relevantes a nuestros propósitos. Estos sistemas mapean un cierto número de entradas $x_1,...,x_n$ en un conjunto de salidas $O_1,...,O_m$. Por simplicidad supondremos que sólo tenemos una salida (m=1). Además, supondremos que la red está dividida en capas -cada una con un cierto número finito de nodos- que se comportan de manera idéntica. La primera capa recibe las señales de entrada $x_1,...,x_n$ y las distribuye en la siguiente capa de la red; se asume que esta primera capa, generalmente no realiza procesamiento de información. La última contiene sólo un nodo que emite la señal de salida de la red. Las capas que quedan entre la de entrada y la de salida se conocen como capas ocultas. Su número puede ser arbitrario.

Puesto que tenemos n datos de entrada, la señal de salida del j-ésimo nodo de la primera capa oculta, compuesta de p neuronas, está dada por:

$$h_j = S_1\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} x_i\right) \quad \text{(Ec.1)}$$

donde ji son los pesos sinápticos de conexión entre la neurona i y la neurona j; $S_1(x)$ es una función tipo sigmoide.

En la segunda capa oculta, las señales h_j se combinaran de manera análoga, dando como resultado:

$$k_l = S_2\left(\sum_{j=0}^{p} \beta_{lj} h_j\right) \quad \text{(Ec.2)}$$

donde l = 1,...,q y donde q es el número de neuronas en la segunda capa oculta.

Suponiendo, por razones que se expondrán más adelante, que la red tiene sólo dos capas ocultas, entonces la capa de salida, compuesta de un solo nodo, implementa una combinación lineal de las señales k_l de la forma:

$$O = \sum_{l=1}^{q} k_l \quad \text{(Ec.3)}$$

Para simplificar la notación, representamos en conjunto de señales de entrada $x_1,...,x_n$ como x y al conjunto total de pesos sinápticos (α_{ji} y β_{lj}) por π. La señal de salida, como función de estas variables, es entonces $O=f(x,\pi)$. Combinando las ecuaciones 1, 2 y 3, obtenemos:

$$f(x,\pi) = \sum_{l=1}^{q}\left(S_2\left\{\sum_{j=1}^{p}\beta_{lj}\left[S_1\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ji}x_i\right)\right]\right\}\right) \quad \text{(Ec.4)}$$

De la ecuación 4 pueden derivarse dos observaciones muy importantes:

Una red neuronal con ciertos parámetros "x" y "π" se dice que implementa una función *f*. Sin embargo, como el conjunto π no puede conocerse de antemano, estas implementaciones rara vez son perfectas. Siendo entonces $N(x,\pi_0)$ la salida de la red neuronal con entradas x y pesos sinápticos π_0 elegidos aleatoriamente, puede aplicarse algún método de aprendizaje que genere una secuencia $\pi_0,\pi_1,\pi_2,...$ tal que converja al conjunto óptimo en un número finito de pasos. Esto significa que:

$$N(x,\pi_0) \rightarrow N(x,\pi_1) \rightarrow \ldots \rightarrow f(x,\pi)$$

Uno de los métodos más efectivos hasta ahora conocido para llevar a cabo este tipo de aprendizaje es el paradigma de *Back-Propagation*, cuyo fundamento teórico y sus aplicaciones más recientes se discuten en otros trabajos (6, 7).

La segunda observación referente a la ecuación 4 es la más relevante para el presente trabajo, y está directamente relacionada con la estructura de esa ecuación.

Es fácil ver que f está formada por una superposición de funciones, S_1 y S_2 en el presente caso.

Esta observación es la que ha sugerido que el fundamento formal de los SC está dado por el mapeo de funciones sencillas (S_1 y S_2) en funciones más complicadas (f). Si esto es cierto, se podría decir que existe un equivalente en complicado para los SC de la máquina de Turing, que es el fundamento de las computadoras clásicas. La posibilidad de este fundamento teórico es de vital importancia para las futuras investigaciones en este campo.

El Teorema de Kolmogorov de superposición de funciones es precisamente el candidato idóneo para ser el fundamento general y abstracto de estos SC, ya que demuestra que -en principio- cualquier tipo de función puede ser mapeada o representada sólo con dos capas ocultas de nodos o elementos procesadores.

Trabajos recientes (8, 9) han demostrado que son suficientes redes neuronales con dos capas ocultas tales que $S_1=S_2=S$ para representar cualquier conjunto de funciones continuas. Sin embargo, en este trabajo se va a estudiar con más detalle el teorema de Kolmogorov porque éste es menos restrictivo, en cuanto a las funciones que deben implementar los nodos, con lo cual proponemos la posibilidad de que las funciones que intervienen en la superposición sean del tipo que ha estudiado intensivamente cierta rama de la Psicología Experimental, conocida como la Psicofísica. Proponemos que estas funciones (bastante sencillas), son las que permiten a una red neuronal representar eventos del mundo exterior en una función más complicada (22).

ANÁLISIS MATEMÁTICO

El Teorema de Kolmogorov está relacionado con el problema de representar funciones continuas de 3 variables con funciones continuas de menos de 3 variables. Su origen como ya mencionamos es el problema 13 de Hilbert (4); en él, se pide demostrar que la ecuación de séptimo grado:

$$X^7 + xX^3 + yX^2 + zX + 1 = 0 \quad \text{(Ec.5)}$$

Esta ecuación no se puede resolver con la ayuda de cualquier función continua de sólo dos variables.

Kolmogorov (5) contribuye a la solución de este problema con un teorema, en el que mostró que existen funciones fijas, Φ_{pq}, continuas y crecientes en el intervalo $I=[0,1]$ tales que toda función continua en I se puede escribir de la forma:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{q=1}^{2n+1} g_q\left(\sum_{p=1}^{n} \Phi_{pq}(x_p)\right) \quad \text{(Ec.6)}$$

con g_q funciones continuas de una variable adecuadamente elegidas.

Algunos autores han simplificado la representación de f dada por Kolmogorov. Por ejemplo:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{q=1}^{2n+1} g\left(\sum_{p=1}^{n} \sigma_p \Phi_q(x_p)\right) \quad \text{(Ec.7)}$$

con σ_p constantes. Es decir, expandiendo la fórmula anterior:

$$\begin{aligned} f&(x_1,\ldots,x_n) \\ &= g(\sigma_1\Phi_1(x_1)+\sigma_2\Phi_1(x_2)+\ldots+\sigma_n\Phi_1(x_n)) \\ &+ g(\sigma_1\Phi_2(x_1)+\sigma_2\Phi_2(x_2)+\ldots+\sigma_n\Phi_2(x_n)) \\ &+\ldots+g(\sigma_1\Phi_{2n+1}(x_1)+\ldots+\sigma_n\Phi_{2n+1}(x_n)) \end{aligned} \quad \text{(Ec.8)}$$

obtenemos la simplificación hecha por Lorentz (10) y Sprecher (11).

En pocas palabras, Kolmogorov demuestra que *cualquier función continua de "n" variables se puede representar con funciones de una sola variable.* Derivado del trabajo de Kolmogorov, es posible entonces representar funciones en términos de otras. Se pueden emplear superposiciones de funciones:

$$f(x,y,z) = F[g(x,y),h(q[x],k[z])] \quad \text{(Ec.9)}$$

o superposiciones lineales en las que se consideran combinaciones de funciones fijas con funciones variables de la forma:

$$f(x,y,z)=\sum_{i=1}^{m} p_i(x,y)\cdot g_i\left[q_i(x,y)\right] \quad \text{(Ec.10)}$$

donde p_i y q_i son fijas.

Si bien esta conjetura ha sido ampliamente estudiada, hasta hace muy pocos años, se consideraba que era un problema sin ninguna aplicación fuera de la Matemática -como lo comenta Lorentz (4) en una revisión del problema 13 de Hilbert-, en los años recientes cuando se estudian los fundamentos de la neurocomputación, se ha visto que tiene un profundo significado en las bases formales de este tipo de computadoras. Y también tiene un profundo significado en la teoría de la representación de información en sistemas naturales y artificiales; sin embargo, su aplicación excluye a las funciones continuamente diferenciables (como lo probó Vituskin) (12).

FUNDAMENTO PSICOFÍSICO

La conjetura de Hilbert, y la respuesta dada por Kolmogorov y otros, es muy importante si se relaciona con los trabajos experimentales en psicofísica sensorial; en donde la pregunta de investigación es: ¿se sabe si los humanos representan la información del mundo, en forma de funciones simples? Si la respuesta es sí, entonces: ¿cuáles son esas funciones? y ¿para qué dimensiones físicas operan?

En la investigación psicológica básica, se ha estudiado la forma en cómo los humanos representan una gran cantidad de eventos físicos (13). La importancia principal, entonces en los trabajos en SC -desde esta perspectiva- es analizar y probar si estos modelos computacionales "concuerdan" con los datos de la psicofísica sensorial, y vincular ambas partes de los sistemas neurocomputacionales para -de alguna forma- probar su adecuación para realizar tareas, en forma análoga a como se supone realizan los sistemas perceptuales humanos.

En los estudios en Psicofísica, los autores trataban de analizar cuál es la función, que mapea una dimensión física en una dimensión psicológica. La respuesta a esta pregunta ha sido el desarrollo de las funciones psicofísicas (14,15). En la mayoría de los casos, en lo general, sabemos que todas las magnitudes sensoriales, se mapean psicológicamente con una función matemática específica.

Las funciones psicofísicas surgieron al querer encontrar la relación entre la intensidad de los estímulos o eventos externos y la sensación interna (psicológica) de los mismos. Las dos postulaciones más importantes de dicha relación son: La propuesta por Fechner (16), quien encuentra que cada vez que un estímulo es duplicado físicamente, se añade un incremento constante a la sensación; esta relación puede ser explicada como una función logarítmica en la que cuando el estímulo se incrementa geométricamente, la sensación se incrementa aritméticamente. La segunda postulación es la de Stevens (14) de una función de potencia ("*power law*"), la cual muestra que existe una relación simple entre el estímulo físico y la respuesta sensorial: proporciones iguales del estímulo producen proporciones subjetivas iguales. En todos los continuos que se han encontrado gobernados por la ley de potencia, un cambio porcentual constante del estímulo, produce un cambio porcentual constante en el efecto percibido.

Estas funciones psicofísicas, permiten describir los datos de una gran cantidad de situaciones experimentales; también es una herramienta útil para el estudio de los procesos de codificación de información en humanos y de los correlatos fisiológicos de los procesos perceptuales.

La función general de la ley de potencia es:

$$Y = aX^b$$

donde:

- Y= magnitud sensorial
- a= constante que determina la unidad de la escala.
- X= intensidad del estímulo.
- b= exponente que depende de la modalidad sensorial y de las condiciones de los estímulos. Distingue un continuo sensorial de otro e indica la fineza discriminativa de cada sistema sensorial.

En ésta, "b" determina el tipo de función de transferencia que realiza el organismo, en

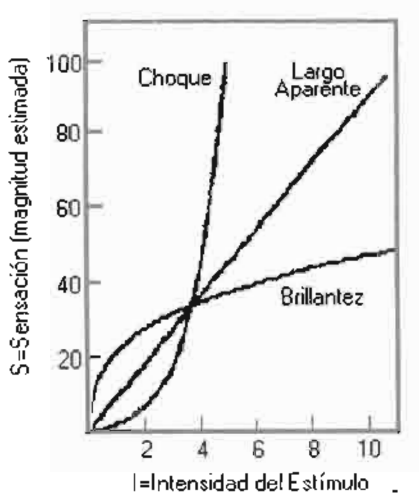

Figura 1.

donde puede ser que éste comprima información, para los casos en donde b<1; en otros casos, multiplica la información, cuando b>1. En algunos casos, el organismo mantiene una relación de conservación de información, son los casos cuando b=1. Esto se puede observar en forma más clara, en la Fig. 1.

En el caso de la Psicofísica, se tiene bastante bien estudiado, cómo diferentes magnitudes sensoriales (o sea Y's) tienen una fórmula específica, con un valor para "a" y "b" específicos.

En la Tabla 1, se muestran diferentes valores de exponente para diferentes modalidades sensoriales.

Por otro lado, existe una serie de trabajos en los que se ha postulado un modelo de dos etapas de los juicios de magnitud (17,18). Este modelo asume que la función de potencia, es el resultado de dos transformaciones:

a) La transformación de entrada entre el estímulo y su representación central, y

b) La transformación de salida entre el correlato central del estímulo y la respuesta y que cada transformación es una función de potencia, de lo cual se deriva que el exponente de la función psicofísica de potencia, es un producto de los exponentes de las transformaciones de entrada y de salida.

Un aspecto muy interesante relacionado con esto, es el hecho de que el exponente "b", tiene una variabilidad intrasujeto, que teóricamente no debería de existir, debido a que son funciones de transferencia de información de tipo automático. Esa variabilidad no se podía

Tabla 1. Exponentes "b" representativos de las funciones de potencia relativos a la estimación de magnitud subjetiva con respecto a su magnitud física.

ESTÍMULOS:	EXPONENTE "b"
Eléctricos (piel)	3.5
Saturación	1.7
Apertura de dedos	1.3
Peso	1.1
Longitud de líneas (visual)	1.0
Áreas (visual)	0.8
Sonido (tono a 3000 Hz)	0.67
Vibración (en piel 250 Hz)	0.6
Gusto (dulce)	0.6
Olfato (café)	0.5
Sonido (tono a 1000 Hz)	0.3
Brillantez	0.3

explicar, sin embargo, en trabajos anteriores (19-21), se ha mostrado que la constante "b" está íntimamente relacionada con el procesamiento central de información y variables cognitivas relacionadas, en particular con la velocidad de procesamiento de información en tareas que requieren el uso de imágenes "internas", quedando como:

$$Y = aX^{b(I)}$$

Cuando se corrige el exponente con este valor I de procesamiento de información, se reduce drásticamente la variabilidad del mismo. Este ejemplo de las funciones psicofísicas, es el caso más claro de cómo los humanos mapean magnitudes físicas, en una manera que está estrictamente controlada por funciones matemáticas de potencia; en donde, la suma de todas las funciones de potencia de las magnitudes físicas a las que responde el humano, forman una función de tipo:

$$D = f(Y_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_n)$$

en donde las "Y" son funciones psicofísicas para magnitudes sensoriales específicas, como serian las funciones de temperatura, brillantez, dolor, presión acústica, etc.; y la "*D*" es una de las pocas dimensiones que forman una función de representación o mapeo de información.

La importancia de este tipo de trabajos es que, hasta hace poco tiempo, "no se sabía que hacer" con esas funciones psicofísicas; pero en la actualidad, podemos suponer que posiblemente, si se hace una superposición de funciones -como lo demostró Kolmogorov-, por lo tanto es posible "representar" el mundo físico en un SC, de la clase general conocida como "perceptrones", con por lo menos dos capas ocultas; en donde la transformación entre el evento físico externo al sujeto y su representación interna, está dada por estas funciones psicofísicas (22).

Una ganancia adicional que no se había apreciado, es que las funciones exponenciales son la base de los sistemas con criticabilidad auto-organizada y forman parte de una teoría general de los fenómenos complejos (23).

Esta relación de las funciones de potencia en la psicofísica sensorial, permite encontrar un fundamento muy fuerte de los SC multicapa, como sistemas de representación de información. El problema es que, ha sido muy poco el esfuerzo por unificar, en una teoría general, los diversos procedimientos matemáticos que se utilizan en este tipo de SC; por ello, el explorar su relación con las demostraciones de Kolmogorov, es una tarea de gran importancia para el desarrollo de esta área de la computación.

REFERENCIAS

1. Amit, D.J. *Modeling brain function.* USA. Cambridge University Press. 1989.

2. Hecht-Nielsen, R. Kolmogorov' mapping neural networks existence theorem. *Proceedings of the IEEE First International Conference on Neural Networks*, San Diego, Calif.1987, III:11-14.

3. Kurková, V. Kolmogorov's Theorem. In: Arbib, M. *The Handbook of Brain Theory and Neural Networks.* USA. MIT Press. 1995.

4. Lorentz, G.G. The 13th Problem of Hilbert, *Proccedings of Symposia in Pure Mathematics* 1976, 28: 419-430.

5. Kolmogorov, A. N. "On the representation of continuous funtions of several variables by superposition of continuous funtions of one variable and addition", *Doklay* 1957, 114: 679-681.

6. Cybenko, G. "Continuous valued neural networks with two hidden layers are sufficient". *Technical Report*. Dept. of Computer Science, Tufts University, March, 1988.

7. Valezuela Medina, M., Contreras Ibañez, C., Romero Bastida, M. y Figueroa, J., Uso del back´propoagation para el análisis de curvas estadísticas, *Congreso Nacional de Informática, Computación y Computación Educativa*. 1989. Querétaro, Qro., México, 9-11 de noviembre.

8. Cybenko, G. Mathematical Problems in Neural Computing. *Technical Report.* Center for Supercomputin Research and

Developmeent, University of Illinois, August 1989.

9. Hornik, K., Stinchcombe, M. y White, H. Multilayer feedforward networks are universal approximators, *Neural Networks*. 1989, 2: 359-366.

10. Lorentz, G.G. *Aproximation of Functions*. New York: Holt, Rienhart & Winston, 1966.

11. Sprecher, D.A. "On the Structure of Continuous Functions of Several Variables". *Transactions of the American Mathematical Society*. 1964. 115: 340-355.

12. Vituskin, A. G. "Proof of the existence of analytic functions of several complex variables wich are not representable by linear superpositions of continuosly differenciable functions of fewer variables". *Dolkay Akademy, Nauka SSSR*. 1964, 156: 1258-1261.

13. Vargas-Medina, E. Predicting pattern recognition in human subjects: an experimental test of formal models, *XXVI International Congress of Psychology*. 1996. Montréal, Canada, August, 16-21.

14. Stevens, S. S. *Psychophysics: introduction to its perceptual, neural, and social prospects*. USA. John Wiley & Sons. 1975.

15. Falmagne, J.C. *Elements of psychophysical theory*. New York: Oxford University Press. 1985.

16. Fechner, G. T. *Elemente der Psychophysick*, vol I y II. Leipzig: Breintkopf & Härterl. 1860.

17. Curtis, D. H.; Attneave, F. y Harrington, "T.L.A. test of a two-stage model of magnitude judgment". *Perception and Psychophysics*. 1968, 3: 25-31.

18. Rule, S.J., Curtis, D.W. y Markley, R.P. "Input and output transformations from magnitude estimation". *J. Exp. Psychol.* 1970, 86: 343-349.

19. Figueroa, J. G.; V. M. Solís; E. G. González "The possible influence of imagery upon retrieval and representation in Long Term Memory". *Acta Psychologica*. 1974, 38: 424-428.

20. Figueroa, J. G., Carrasco, M. y Hernandez, G. Effects of Human Information Processing on psychophysical functions. UNAM, *VII International Biophysics Congress and I Pan-american Biochemistry Congress*, February, 1981.

21. Figueroa, J. G., Carrasco, M., Sarmiento, C. y Bravo, P. Distinción entre los Aspectos Sensoriales y de Memoria en los Juicios Psicofísicos Visuales de Magnitud en Humanos. *XXV Congreso Nacional de Ciencias Fisiológicas*. Guadalajara, Jal. México, julio 1982.

22. Vargas, E., Figueroa, J. G., Flores, C. , Vargas y M. Romero Function Mapping and its Relationship with the Psychophysical Functions in the Theory of Neural Networks. *International Joint-Conference on Neural Networks*. Washington, D. C., January 15-19, 1990.

23. Vargas-Medina, E. y Mayol-Cuevas, W.W. Modelos de Mecánica Estadística como una aproximación a problemas cognitivos complejos. *III Reunión Nacional y II Internacional de Pensamiento y Lenguaje*, Querétaro, Qro., México, octubre 20-22, 1993.