



ANÁLISIS ESTRUCTURAL, CINEMÁTICO Y DINÁMICO DE UN ROBOT MÓVIL EXPERIMENTAL

Hugo G. González-Hernández, Bernardo Tame Rivera y Eduardo R. Mondragón Parra
Laboratorio del Centro de Investigación, Universidad La Salle

RESUMEN

En el presente trabajo se muestra un análisis detallado de la dinámica de un robot móvil. Se presenta primeramente un análisis estructural y, posteriormente, el análisis cinemático y dinámico del sistema, por último se muestran algunas simulaciones del comportamiento dinámico. El robot consta de dos motores: uno de tracción y otro de dirección. El robot puede moverse en cualquier dirección en el plano horizontal.

ABSTRACT

The current paper shows a detailed analysis of an experimental mobile robot dynamics. First, an structural analysis and then a kinematics and dynamics analysis are shown, finally we show some simulations of its dynamical behavior. The robot has two dc motors: a traction motor and a direction motor. The robot can move in any direction on the horizontal plane.

INTRODUCCIÓN

Un robot móvil omnidireccional permite el seguimiento (1) de diferentes tipos de trayectorias de manera fidedigna. En el presente trabajo se muestra un análisis detallado del comportamiento estructural, cinemático y dinámico de un robot móvil omnidireccional. El robot que se analiza es el segundo prototipo de la serie RoMEO (Robot móvil experimental omnidireccional).

ANÁLISIS ESTRUCTURAL.

En la Fig. 1 se muestran dos de las zonas más representativas del análisis estructural.

Análisis de la Zona 1.

Este análisis resulta ser bastante sencillo, ya que se considera la carga aplicada al poste como axial, además de estática (2).

La carga total de los tres postes se muestra en la tabla 1.

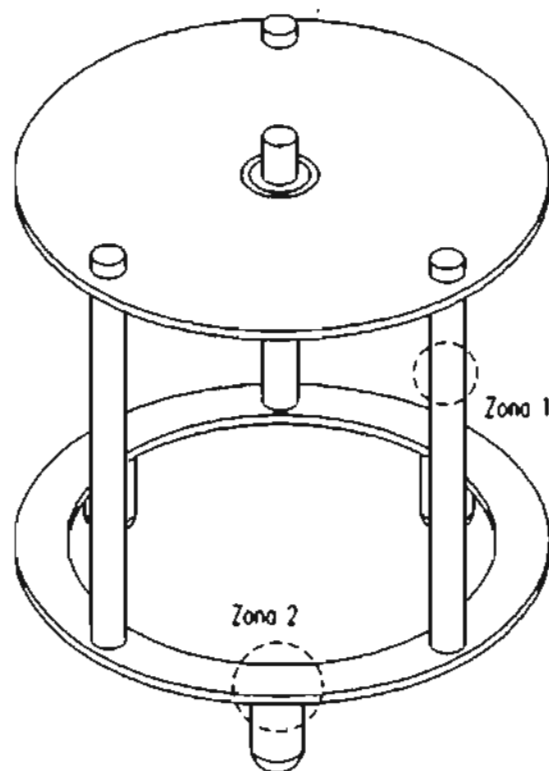


Figura 1. Estructura de mini-RoMEO.



Tabla 1. Carga total.

Elemento	Masa en g
Base	380
Tomillos	(3)(6) = 18
Motor	170.5
Circuito	100
Total	668.5

La carga total es de 6.558N. La carga de un solo poste es (por simetría): $W_{\text{poste}} = 2.186 \text{ N}$. El área del poste es:

$$A_{\text{poste}} = 0.25\pi(0.0115 \text{ m})^2 = 1039\text{E}-04 \text{ m}^2$$

los valores de resistencia del aluminio comercial son:

S_u	S_{yp}	$t_{\text{máx}}$	S_{er}
110 MPa	41 MPa	121 MPa	48 MPa

calculando el esfuerzo de trabajo y comparándolo con el esfuerzo de fluencia:

$$s_t = 2.186\text{N}/1.039 \text{ E-}04 \text{ m}^2 = 21.04 \text{ kPa}$$

de tal forma que la estructura es suficientemente robusta.

Análisis de la Zona 2.

Para este análisis se considera la sección mostrada en la Fig 2.

Las cargas de 1.093 N son de los postes, mientras que la reacción de 2.186 N es del

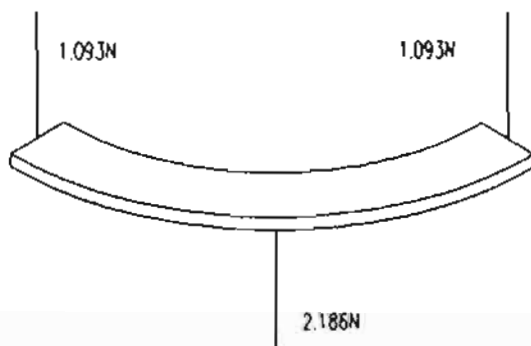


Figura 2. Cargas actuantes en la zona 2.

rodamiento. Para considerar esta parte en equilibrio estático es necesario considerar un momento en sentido contrario al generado por las dos cargas de 1.093 N. Las distancias de aplicación de fuerzas se obtuvieron mediante el modelo representado en la Fig 3.

Para $r = 0.09 \text{ m}$ y $\text{ang} = \pi/6$: conociendo

$$Y = ((0.09)(6)\text{sen}(\pi/6))/\pi$$

$$Y = 0.0859 \text{ m};$$

$$r-Y = 4.056\text{E}-03 \text{ m};$$

$$X = 0.005 \text{ m}; \quad 2X = 0.01 \text{ m}.$$

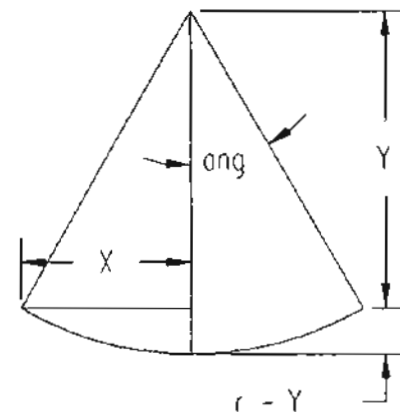


Figura 3. Distancias de aplicación de fuerzas.

Con estas distancias conocidas podemos obtener los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos, los cuales se muestran en la Fig 4.

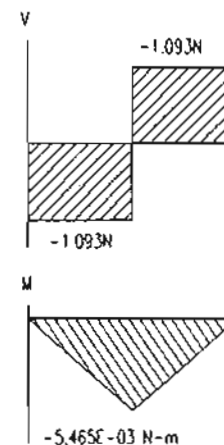


Figura 4. Diagramas de esfuerzos cortantes y momentos.

El esfuerzo normal es:

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = -102.47 \text{ kPa}$$

$$s = -102.47 \text{ kPa}$$

El esfuerzo cortante es:

$$\tau_{\text{máx}} = T/Q; Q = bh^2/(3+1.8(h/b))$$

$$\tau_{\text{máx}} = 46.55 \text{ kPa}$$

Analizando mediante el círculo de Mohr encontramos.

$$s_1 = 46.55 \text{ kPa} + 102.47 \text{ kPa}/2 = 97.785 \text{ kPa}$$

ANÁLISIS CINEMÁTICO

En el caso del análisis cinemático directo tenemos como variables independientes a θ (ángulo del motor de dirección) y γ (ángulo del motor de tracción). Como variables dependientes a x_1, y_1 . Como parámetro a r . Véase la Fig 5.

La consigna de posición es el punto $P_1(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Se considera que no hay deslizamientos y que inicialmente el eje de la rueda esté alineado con el eje X.

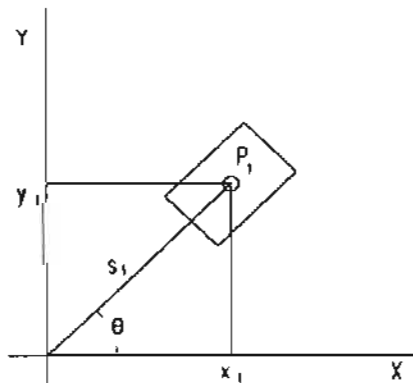


Figura 5. Esquema cinemático.

$$|s_1| = (\gamma_1)(r) = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \quad (\text{Ec. 1})$$

$$s_1 \cos \theta_1 = x_1 \quad (\text{Ec. 2})$$

$$s_1 \text{sen} \theta_1 = y_1 \quad (\text{Ec. 3})$$

donde $0 \leq \theta_1 < 360^\circ$ y $-a < \gamma_1 < a$

De las ecuaciones (1), (2) y (3) se obtiene:

$$x_1 = (\gamma_1)(r) \cos \theta_1 \quad (\text{Ec. 4})$$

$$y_1 = (\gamma_1)(r) \text{sen} \theta_1 \quad (\text{Ec. 5})$$

donde (4) y (5) son las ecuaciones de la cinemática directa.

Las ecuaciones de cinemática inversa son:

$$\gamma_1 = \frac{s_1}{r} = \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{r} \quad (\text{Ec. 6})$$

$$\theta_1 = \arccos \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \right) \quad (\text{Ec. 7})$$

El caso general para encontrar la ubicación del centroide del robot:

$$x_{n+1} = x_n + (\gamma_{n+1} - \gamma_n)(r) \cos(\theta_n) \quad (\text{Ec. 8})$$

$$y_{n+1} = y_n + (\gamma_{n+1} - \gamma_n)(r) \text{sen}(\theta_n) \quad (\text{Ec. 9})$$

para un punto $P_n, n = 1, 2, 3, \dots$

ANÁLISIS DINÁMICO

Se considera que el centro de masa está sobre el vástago, el robot requiere balanceo para cumplir esta consideración. Véase la Fig 6.

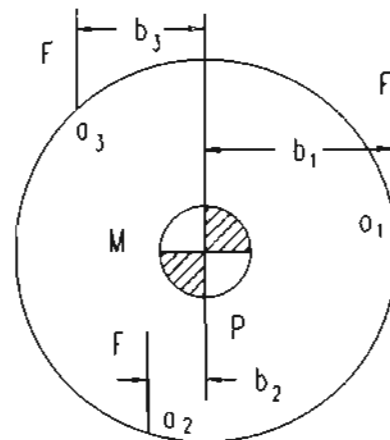


Figura 6. Diagrama de cuerpo libre.



Por suma de fuerzas

$$P = 3F$$

por suma de momentos

$$F(-b_1 + b_2 + b_3) = 0$$

por lo que

$$b_1 = b_2 + b_3.$$

Lo anterior se cumple, apoyado en un análisis geométrico. En a_1 , a_2 , a_3 , hay una misma fuerza de fricción F , dado que el peso es distribuido entre los tres apoyos de manera uniforme. Además, son rodamientos del mismo tipo. Véase la Fig 7.

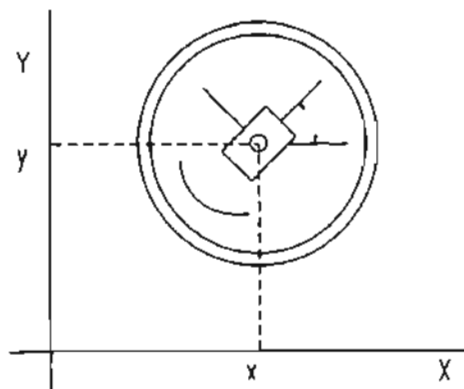


Figura 7. Esquema dinámico.

Véase además la Fig 8.

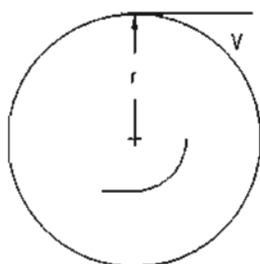


Figura 8. Rueda de tracción.

Tenemos como coordenadas generalizadas (3): $q = [\theta \ \gamma]$

Se consideraron las variables y parámetros de la Tabla 2:

Tabla 2. Variables y parámetros

T_1	Torque del motor de dirección
T_2	Torque del motor de tracción
x	Coordenada de posición
y	Coordenada de posición
θ	Ángulo del motor de dirección
γ	Ángulo del motor de tracción
M	Masa del robot
I_1	Inercia respecto a θ
I_2	Inercia respecto a γ
r	Radio de la rueda de tracción

Las ecuaciones de Lagrange son:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \theta} = T_1 \quad (\text{Ec. 10})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \gamma} + \frac{\partial D}{\partial \gamma} = T_2 \quad (\text{Ec. 11})$$

La energía potencial es nula. La energía cinética es:

$$T = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\gamma}^2 \quad (\text{Ec. 12})$$

con

$$v = (\dot{\gamma})r \quad (\text{Ec. 13})$$

el Lagrangiano será

$$L = T - U = \frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\gamma}^2 \quad (\text{Ec. 14})$$

Consideramos la función de disipación de Rayleigh:

$$D = \frac{1}{2} b_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} b_2 \dot{\gamma}^2 + \frac{1}{2} b_3 (r\dot{\gamma})^2 \quad (\text{Ec. 15})$$

De tal forma que las ecuaciones de movimiento del sistema son:

$$I_1 \ddot{\theta} + b_1 \dot{\theta} = T_1 \quad (\text{Ec. 16})$$

$$(Mr^2 + I_2) \ddot{\gamma} + (b_2 + b_3 r^2) \dot{\gamma} = T_2 \quad (\text{Ec. 17})$$



Expresando como variables de estado, se tiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b_1}{I_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{b_2 + b_3 r^2}{Mr^2 + I_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{I_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{Mr^2 + I_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

para:

$$x_1 = \theta, \quad x_2 = \dot{\theta}, \quad x_3 = \gamma, \quad x_4 = \dot{\gamma}$$

SIMULACIONES

La dinámica del sistema fue simulada mediante el programa Simnon™. Se utilizó una señal de torque como la mostrada en la figura 9 para el motor de dirección.



Figura 9. Torque 1 aplicado (detalle)

En la figura 10 se puede observar el comportamiento del ángulo θ (ángulo de dirección) con respecto al tiempo ante esta señal.

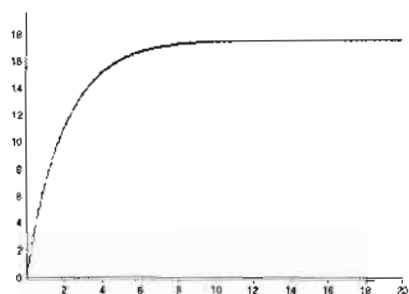


Figura 10. Ángulo θ .

Para el motor de tracción se utilizó un torque constante y el comportamiento del ángulo γ (de tracción) que se muestra en la Fig. 11.

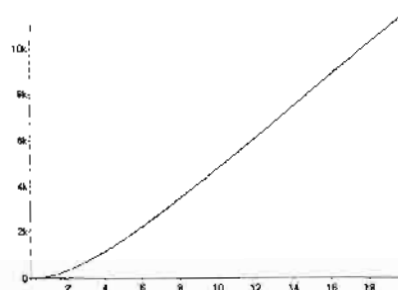


Figura 11. Ángulo γ

La trayectoria resultante está dada por la combinación de las ecuaciones 8, 9, 16 y 17. Graficando en forma paramétrica 8 y 9 se obtiene la trayectoria del robot en el plano (Fig. 12)

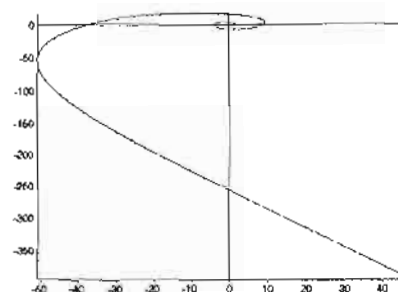


Figura 12. Trayectoria del robot en el plano

CONCLUSIONES

La planeación de movimiento en Robótica es un área en la que intervienen conceptos de control, modelado de sistemas y algunas veces de topología. En este trabajo se muestra el análisis de movimiento de un robot móvil omnidireccional, este es un primer acercamiento hacia la planeación del movimiento.

Los resultados hasta el momento son simulados, se está trabajando en la validación experimental del modelo matemático. Una vez



validado el modelo procederemos con el control.

Debido a que el modelo matemático es lineal, no se presentan comportamientos dinámicos complicados en la simulación (4).

REFERENCIAS

1. Mondragón-Parra, E.R.; Tame-Rivera, B.; González-Hernández, H. G. (1996) *Robot Móvil Omnidireccional Controlado por PC Remota para Seguimiento de Trayectorias Libres de Obstáculos*. Memorias del 6to. Congreso Internacional de Electrónica, Comunicaciones y Computadoras. Cholula, Puebla.
2. Kimbrell, J. (1991) *Kinematics Analysis and Synthesis*. McGraw-Hill. Singapore.
3. Marion, J. B. (1965), *Classical Dynamics*. Academic Press, N.Y.
4. Woernle, C. (1995) *Nonlinear Motion Control of a Nonholonomic Mobile Platform by Exact Linearization*. Proceedings of IFTOMM 95'. Milano, Italy.