



ADAPTACIÓN DE LA ARQUITECTURA DE REDES NEURONALES ESTOCÁSTICAS POLINOMIALES UTILIZANDO APRENDIZAJE DE AUTOMATAS

Eduardo Gómez¹ y Alexander S. Poznyak²

¹Laboratorio del Centro de Investigación Universidad La Salle,
Benjamín Franklin 47, Col. Hipódromo-Condessa, México DF 06170,
email: egomez@aldebaran.ci.ulsal.mx

²Sección de Control Automático, CINVESTAV-IPN,
Av. IPN 2508 AP 14-740, México D.F., CP 07000 email: apoznyak@ctrl.cinvestav.mx

RESUMEN

Se discute la forma de obtener el número óptimo de nodos en una Red Neuronal artificial Polinomial con perturbaciones de tipo estocástico en la salida de cada nodo. El algoritmo utilizado se basa en una técnica de aprendizaje reforzado. Para resolver este problema de optimización se introduce un índice especial de desempeño de tal forma que el número óptimo de nodos corresponde al punto mínimo de este criterio. Este criterio es una combinación de la minimización de una función residual y de la varianza de las perturbaciones consideradas de naturaleza aleatoria. Un valor grande en la varianza de la perturbación da como resultado un óptimo diferente del número de neuronas en la red debido al efecto de "interferencia". El algoritmo de aprendizaje utilizado permite aplicar este procedimiento sin conocer la naturaleza de las perturbaciones y disminuye la cantidad de operaciones que se requieren en la convergencia del estimado. Se presentan algunos resultados de simulación para ilustrar la potencialidad del algoritmo propuesto.

ABSTRACT

This paper is concerned with the selection of a number of nodes in polynomial artificial neural nets containing stochastic noise perturbations in the outputs of each node. The suggested approach is based on a reinforcement learning technique. To solve this optimization problem we introduce a special performance index in such a way that the best number of nodes corresponds to the minimum point of the suggested criterion. This criterion presents a linear combination of a residual minimization functional and some "generalized variance" of the involved disturbances of random nature. A large value of the noise variance leads to a different optimal number of neurons in a neural network because of the "interference" effect. The nature of the noise perturbations is not necessary to be known using the learning algorithm and the computing effort decreased to get the convergence estimated. Simulation modeling results are presented to illustrate the effectiveness of the suggested approach.

INTRODUCCIÓN

Las *Redes Neuronales Artificiales* (RNA) han demostrado ser una herramienta muy importante en una gran variedad de problemas de ingeniería (1-4). Especialmente en aplicaciones de RNA a control y reconocimiento de patrones (5-8). A pesar de la gran cantidad de publicaciones en el área, es una minoría la que considera el problema de adaptar la arquitectura de la red para una aplicación en particular (9). Algunas de estas publicaciones consideran límites máximos y mínimos para la selección del número de nodos o

neuronas en las capas ocultas (10). Otros autores discuten la influencia del número de nodos y capas ocultas en la minimización del error cuadrático entre la salida de la red y la salida deseada en una aplicación en particular (11, 12). Otros artículos sugieren algunos algoritmos para estimar el número de nodos para diferentes paradigmas (13-19). Como se demostró en (20) bajo la presencia de ruidos de naturaleza estocástica en la entrada y salida de cada nodo existe un procedimiento por el cual se puede obtener el número óptimo de nodos de una RNA para una aplicación en particular donde se conoce la estadística de los ruidos o perturbaciones.



En este trabajo el tipo de red considerada es una Red Neuronal Artificial Polinomial (RNAP) que contiene perturbaciones estocásticas en la salida del nodo. El objetivo principal es obtener un algoritmo adaptable que obtenga el óptimo (desde el punto de vista de aproximación) número de nodos de una RNAP, utilizando solamente la información disponible de las mediciones de las señales de entrada y salida. En (19) este problema fue resuelto considerando la suposición que se conoce la estadística completa sobre las perturbaciones de antemano. En nuestro caso esta suposición no es necesaria debido a que se utilizará un algoritmo *adaptable*.

Para poder realizar este procedimiento en ausencia de toda la información necesaria sobre la estadística de la perturbaciones se requiere cierta clase de "aprendizaje" para obtener un resultado adecuado. En el caso de optimización discreta sobre un conjunto finito en la presencia de perturbaciones se sugiere aplicar Aprendizaje de Automatas. Esta técnica ha demostrado tener muy buenos resultados en estas situaciones (20-22). Para este trabajo se aplicaron las ideas presentadas en (23) para construir el proceso de adaptación de la estructura.

El artículo tiene el siguiente orden:

En la sección 2 se describe las RNAP y el planteamiento del problema; en la sección 3 se explica la forma en que se selecciona el número óptimo de términos en un problema de aproximación de una función multidimensional en la presencia de ruidos o perturbaciones en las mediciones. En la sección 4 se muestra como el problema de seleccionar el número óptimo de nodos en RNAP puede traducirse al problema de aproximación descrito en la sección anterior. La sección 5 describe la técnica de aprendizaje de autómatas y el esquema de reforzamiento de Bush-Mosteller para obtener el número óptimo de nodos. La sección 6 explica la aplicación de aprendizaje de autómatas para seleccionar el número óptimo de nodos en RNAP. La descripción del algoritmo numérico se presenta en la sección 7 con algunos ejemplos de simulación. Las conclusiones se presentan en la sección 8.

REDES NEURONALES ARTIFICIALES POLINOMIALES CON PERTURBACIONES ESTOCÁSTICAS Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Las redes neuronales biológicas tienen

interconexiones sinápticas que son más complejas que una simple sumatoria. Algunos resultados muestran que este tipo de comportamiento es no lineal y puede ser modelado. Existen algunos modelos de RNA que utilizan estos conceptos como son: Redes Neuronales Polinomiales (RNP) (24), Redes Neuronales de Orden Mayor (Higher Order Neural Networks (HONN) (25) y modelos de Interconexiones no lineales (26, 27). Este tipo de representación no es exclusiva de RNA y resultados similares pueden ser encontrados en otras áreas. Por ejemplo: modelos NARMAX (28, 31), métodos de manipulación de datos (Group Method of Data Handling, GMDH) (32, 33) y aproximaciones polinomiales (34).

Las RNAP con perturbaciones estocásticas pueden ser descritas por:

$$\hat{y}_k = \phi(x_1, x_2, \dots, x_{1,k-1}, x_{2,k-1}, \dots, x_{l,k-ndi}, \dots, y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, y_{k-ndo}) + \zeta_k \quad (\text{Ec } 1)$$

donde:

- ndi número de retrasos de la entrada
- ndo número de retrasos de la salida
- $\phi(*)$ es una función no lineal
- ζ es una variable aleatoria
- \hat{y}_k es la función estimada
- x_i son las entradas a la red

El diagrama correspondiente para la RNAP se muestra en la fig. 1. La función no lineal $\phi(*)$ puede ser representada por:

$$\phi(z_1, z_2, \dots, z_{nv}) = a_0(z_1, z_2, \dots, z_{nv}) + a_1(z_1, z_2, \dots, z_{nv}) + a_2(z_1, z_2, \dots, z_{nv}) + \dots + a_{pow}(z_1, z_2, \dots, z_{nv}) \quad (\text{Ec. } 2)$$

donde: z_i es la entrada al modelo, nv es el número total de elementos de $\phi(*)$ tal que:

$$nv = ni + ndi * ni + ndo \quad (\text{Ec. } 3)$$

pow es la potencia máxima de la expresión polinomial y $a_i(z_1, z_2, \dots, z_{nv})$ es un polinomio homogéneo de grado i , para $i=0, \dots, pow$, tal que (35):

$$\begin{aligned}
 a_0(z_1, z_2, \dots, z_{nv}) &= c_0 \\
 a_1(z_1, z_2, \dots, z_{nv}) &= c_{1,1}z_1 + c_{1,2}z_2 + \dots + c_{1,nv}z_{nv} \\
 a_2(z_1, z_2, \dots, z_{nv}) &= c_{2,1}z_1^2 + c_{2,2}z_1z_2 + c_{2,3}z_1z_3 + \dots \\
 &+ \dots z_1z_{nv} + \dots + \dots z_2^2 + \dots z_2z_3 \dots + c_{N_2}z_{nv}^2 \\
 a_3(z_1, z_2, \dots, z_{nv}) &= c_{3,1}z_1^3 + c_{3,2}z_1^2z_2 + c_{3,3}z_1^2z_3 + \dots \\
 &+ \dots c_{3,4}z_1z_2^2 + \dots + c_{3,5}z_1z_2z_3 + c_{3,6}z_1z_3^2 + \dots \\
 &+ \dots z_2^3 + \dots z_2^2z_3 + \dots z_2z_3^2 + \dots + c_{N_3}z_{nv}^3 \\
 a_{pow}(z_1, z_2, \dots, z_{nv}) &= c_{pow,1}z_1^{pow} + c_{pow,2}z_1^{pow-1}z_2 + \dots \\
 &\dots + c_{pow,N_{pow}}z_{nv}^{pow}
 \end{aligned}
 \tag{Ec. 4}$$

donde N_j es el número de términos de cada polinomio tal que $j=1, \dots, pow$. El número total de términos N de la representación (Ec. 1) es igual a:

$$N = \sum_{j=0}^{pow} N_j \tag{Ec. 5}$$

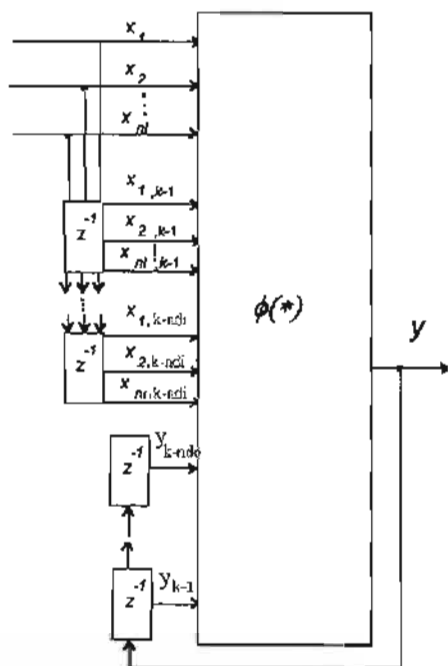


Figura 1. Esquema de RNAP

Considerando lo anterior el problema principal de este trabajo puede ser descrito como en (36, 19):

Utilizando las secuencias de observación de las

señales de entrada y salida de la red, construir un proceso de aprendizaje para obtener asintóticamente (en algún sentido probabilístico) "el óptimo" número de neuronas N . Con este número se obtiene el error mínimo de aproximación.

En la siguiente sección se explica la solución para un problema análogo cuando se quiere aproximar una función multidimensional.

SELECCIÓN DEL ORDEN ÓPTIMO DE UNA APROXIMACIÓN DE UNA FUNCIÓN MULTIDIMENSIONAL EN LA PRESENCIA DE RUIDOS DEPENDIENTES.

Para poder demostrar la forma en que se va obtener el orden óptimo considérese que se cumplen las siguientes suposiciones:

A1) Un vector $z_k \in R^k$ y una salida escalar $y_k \in R^1$ de un modelo de referencia estático pueden ser relacionadas mediante la siguiente ecuación:

$$y_k = f(z_k) + \zeta_k, k = 1, 2, \dots, n \tag{Ec. 6}$$

donde n es el número de mediciones disponibles. $\zeta_k \in R^1$ representa las perturbaciones no medibles de naturaleza estocástica en el tiempo k , $f(z)$ es la medición sin ruido o perturbación. Esta perturbación es una variable aleatoria definida en un espacio de probabilidad (Ω, F, P) tal que:

$$E\{\zeta_k\} = 0, \quad E\{\zeta_k \zeta_s\} = \sigma_k^2 \delta_{ks}$$

(aquí $\sigma_k^2 = \sigma_k^2(z_k)$ es la varianza de la variable aleatoria ζ_k que puede ser dependiente de la entrada z_k ; δ_{ks} es el símbolo Kronecker).

A2) La aproximación del modelo se obtiene como:

$$\hat{y}_k^N = \hat{f}^N(z_k | c_n) = \sum_{i=1}^N c_i^N \phi_i^N(z_k) \tag{Ec. 7}$$

donde $\phi_i^N(z_k)$ representa una función conocida y c_i es la constante o peso de esta función, N es el orden de la aproximación, en otras palabras,



el número de términos necesarios para la estimación de la (Ec. 7).

A3) Los parámetros del modelo (Ec. 7) se obtienen utilizando el Método de Mínimos Cuadrados Ponderados (MMCP) (*Weighted Least Squares Method*, WLSM) (36):

$$\hat{c}_n^N = c_n^N = \arg \min_{c_n} E\{S_n^N\} \quad (\text{Ec. 8})$$

$$S_n^N = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sigma_k^{-2} (y_k - \hat{y}_k^N)^2$$

El vector \hat{c}_n^N que minimiza el error cuadrático puede ser expresado mediante la siguiente fórmula.

$$\hat{c}_n^N = \Gamma_n^N \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sigma_k^2} y_k \phi^N(z_k) \quad (\text{Ec. 9})$$

$$\Gamma_n^N = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sigma_k^2} \phi^N(z_k) (\phi^N(z_k))^T \right)^{-1}$$

o en su forma recurrente:

$$\hat{c}_k^N = \hat{c}_{k-1}^N + \sigma_k^{-2} \Gamma_k^N \phi^N(z_k) \left[y_k - (\hat{c}_{k-1}^N)^T \phi^N(z_k) \right]$$

$$\Gamma_k^N = \Gamma_{k-1}^N - \frac{\Gamma_{k-1}^N \phi^N(z_k) (\phi^N(z_k))^T \Gamma_{k-1}^N}{\sigma_k^2 + (\phi^N(z_k))^T \Gamma_{k-1}^N \phi^N(z_k)} \quad (\text{Ec. 10})$$

Teorema 1. (19) *Considerando las suposiciones A1)-A3) para el MMCP se cumplen la siguientes relaciones*

$$D_n^N = E\{S_n^N\} + 2 \frac{N}{n} - 1 \quad (\text{Ec. 11})$$

donde S_n^N se define por la (Ec. 8) y

$$D_n^N = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sigma_k^{-2} E \left\{ \left(f(z_k) - \hat{f}^N(z_k | \hat{c}_n^N) \right)^2 \right\} \quad (\text{Ec. 12})$$

caracteriza la precisión media cuadrática de la aproximación (7) después de n mediciones de los pares (x_k, y_k) . A la función D_n^N se le denomina función de pérdida conjunta.

Este criterio es una generalización del Criterio de Akaike para el caso de varianza variante en el tiempo (37)

SELECCIÓN DEL ÓPTIMO NUMERO DE NODOS EN RNAP PARA EL CASO DE INFORMACIÓN COMPLETA

El siguiente teorema muestra la equivalencia entre el planteamiento anterior sobre la óptima selección del orden de la aproximación (Ec. 7) para el problema central de la selección óptima de nodos de la RNAP.

Primero, considérese que se cumplen las siguientes suposiciones:

B1) La salida de la RNAP está descrita por la siguiente relación.

$$y_k = \sum_{i=1}^N c_i \phi(z_{i,k}) + \zeta_k \quad (\text{Ec. 13})$$

donde c_i es el peso asociado, $\phi(z)$ es una función no lineal y ζ es la perturbación en la salida del nodo.

B2) Las perturbaciones a la salida ζ_k de cada nodo son una variable aleatoria definida en un espacio de probabilidad (Ω, F, P) tal que son estacionarias, independientes en tiempo y son centradas con varianza finita, por ejemplo:

$$E\{\zeta_k\} = 0, E\{\zeta_i \zeta_s\} = \sigma_\zeta^2 \delta_{is}$$

B3) La función no lineal puede ser representada por:

$$\begin{aligned} \phi(z_1, z_2, \dots, z_{nv}) = & c_0 + c_{1,1}z_1 + c_{1,2}z_2 + \dots + c_{1,nv}z_{nv} + \dots \\ & \dots c_{2,1}z_1^2 + \dots c_{2,2}z_1z_2 + c_{2,3}z_1z_3 + \dots z_1z_{nv} + \dots z_2^2 + \dots \\ & \dots c_{2,2}z_2^2 + c_{2,n_2}z_2^2 + c_{3,1}z_1^3 + c_{3,2}z_1^2z_2 + c_{3,3}z_1^2z_3 + \dots \\ & \dots + c_{3,4}z_1z_2^2 + c_{3,5}z_1z_2z_3 + c_{3,6}z_1z_3^2 + \dots + \dots z_3^3 + \dots \\ & \dots z_1^2z_3 + \dots z_2z_3^2 + \dots + c_{3,N_3}z_3^3 \dots \dots c_{pow,1}z_1^{pow} + \dots \\ & c_{pow,2}z_1^{pow-1}z_2 + \dots + c_{pow,N_{pow}}z_{nv}^{pow} \end{aligned} \quad (\text{Ec. 14})$$

Entonces el modelo no lineal de la (Ec. 13) de la RNAP es equivalente al modelo de la planta estática (Ec. 6). Entonces para un valor suficientemente grande de k tal que $k \rightarrow \infty$ "el número óptimo" $(N_n(\omega_k))^*$ de nodos ($i=1, 2, \dots, N$) puede ser calculado con probabilidad de 1.

La dependencia de la función $D_n^N(\omega_k)$ (Ec. 12) con N se muestra en la fig. 2. Es claro que la curva $\tilde{S}_n^N(\omega_k)$ corresponde a la precisión de la aproximación sin perturbación. La curva 2 (el término $2(\frac{N}{n})$) corresponde a la influencia de los ruidos o perturbaciones en el proceso de aproximación para diferentes valores de N . A mayor cantidad de entradas con ruido produce una mayor distorsión o *interferencia* en la estimación de la salida de cada nodo. El valor óptimo del número de nodos $(N_n)^*$ corresponde al mínimo valor de "la función de pérdida conjunta" D_n^N .

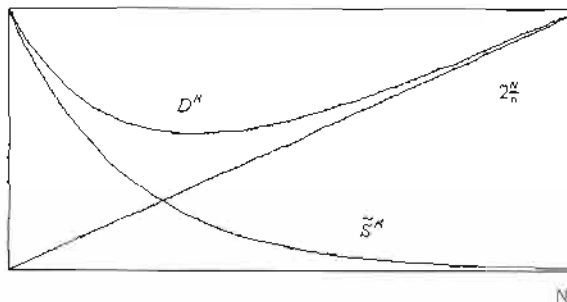


Figura 2. Función de Pérdida Conjunta D_n^N .

Obsérvese que si el valor de la varianza σ_{ξ}^2 se incrementa entonces la curva \tilde{S}_n^N se desplaza hacia abajo y el número óptimo de nodos $(N_n)^*$ se mueve hacia la izquierda.

Una desventaja de este procedimiento es que para estimar $E\{S_n^N\}$ se requiere de una gran cantidad de cálculos para obtener una solución adecuada que converja al valor esperado. En la siguiente sección se explica la forma en que esto se puede evitar utilizando aprendizaje de autómatas. De esta forma se permite cierto tipo de "adaptación" dentro de la estructura.

APRENDIZAJE DE AUTÓMATAS

El aprendizaje de autómatas (AA) (20) se puede describir como un sistema

$$\Sigma = \{\Xi, X, U, P, \mathfrak{R}\} \quad (\text{Ec. 15})$$

donde Ξ es el conjunto de entradas (salidas del medio) ξ_t al tiempo t ; $X = \{x(1), \dots, x(K)\}$ es el conjunto de estados; $U = \{u(1), \dots, u(N)\}$ es el conjunto de salidas o acciones de control; P es el conjunto de vectores de probabilidad $p_i = p_i(1), \dots, p_i(N) \in P$, la probabilidad $p_i(i)$ corresponde a la probabilidad para seleccionar la salida $u_i = u(i)$, $i=1, \dots, N$ al tiempo t , \mathfrak{R} es el esquema de reforzamiento, tal que:

$$\mathfrak{R}: p_t \rightarrow p_{t+1}$$

Este esquema modifica el vector de probabilidades y se basa en las mediciones para obtener el mejor comportamiento en un medio determinado. Cabe aclarar que el medio corresponde al sistema donde se toman las mediciones considerando la perturbación como se muestra en la figura 3.

Usualmente, la relación entre la salida del medio $\xi_t = \xi_t(u_t, \omega)$ (ω es un factor aleatorio) y la función de pérdida Φ_t asociada con el autómata está dada por la siguiente expresión:

$$\Phi_m = \frac{1}{nt} \sum_{i=1}^m \xi_i \quad (\text{Ec. 16})$$

donde nt es el número total de iteraciones del algoritmo.

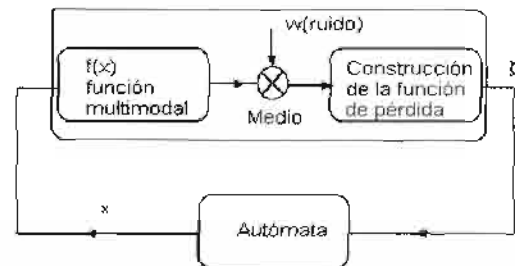


Figura 3. Aprendizaje de Autómatas y su medio.

La teoría de aprendizaje de autómatas se puede resumir como:

Encontrar un esquema de reforzamiento que genere la secuencia $\{p_t\}$ y la acción de control $\{u_t\}$.



para asegurar la minimización asintótica de la función de pérdida (Ec. 17), tal que:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \Phi_n \rightarrow \inf_{\{u_i\}} \quad (\text{Ec. 17})$$

en algún sentido probabilístico (fig. 3).

Uno de los esquemas de reforzamiento más populares fue el desarrollado por Bush & Mosteller en 1958. Este esquema puede describirse mediante una ecuación recurrente:

$$p_{i,t+1} = p_i + \gamma_t [e(u_t) - p_i + \xi_t (e^N - Ne(u_t)) / (N - 1)]$$

$$p_i(i) > 0, \quad (i = 1, \dots, N) \quad (\text{Ec. 18})$$

donde:

$$\xi_t \in [0, 1], \quad e(u_t) = (0, 0, \dots, \underbrace{1, \dots, 1}_{u_t}, \dots, 0, 0)^T,$$

$$e^N = (1, 1, 1, \dots, 1, 1)^T \in \mathbb{R}^N$$

donde u_t es generada de acuerdo a la función de probabilidad p_i y $\gamma_t \in (0, 1)$ es el factor de corrección (ganancia de adaptación) de este esquema.

Los resultados de convergencia para este esquema en el caso binario, continuo y reacciones no estacionarias continuas del ambiente pueden consultarse en (22, 23)

OPTIMIZACIÓN DE LA FUNCIÓN DE PÉRDIDA CONJUNTA

En esta sección se considera la aplicación de AA al problema de la optimización de funciones multimodales basados en la aproximación descrita en (22, 23). También se explica la relación del problema previo a la adaptación de la estructura de RNAP.

Sea $r(x)$ alguna función real para un vector $x \in X \subset \mathbb{R}^M$ (X es un compacto en \mathbb{R}^M) y sea $r(x)$ una función multimodal. En este caso se busca el valor de $x=x^*$ el cual minimiza $r(x)$.

Considérese una cuantificación $\{X\}$ de una región X , tal que:

$$X_i \subset X, X_i \cap X_{j \neq i} = \emptyset, i, j = 1, \dots, N$$

$$\bigcup_{i=1}^N X_i = X \subset \mathbb{R}^M \quad (\text{Ec. 19})$$

Sea q_t la observación medible de $r(x)$ con un ruido w_t , tal que:

$$q_t = r(x_t) + w_t \quad (\text{Ec. 20})$$

donde $x_t \in \{x(1), \dots, x(N)\}$, $x(i) \in X_i$ son puntos fijos y w_t es una variable aleatoria la cual caracteriza el ruido en la observación. La idea central asociada con el uso de AA es encontrar la forma de construir las entradas al autómata.

De tal forma que la entrada ξ_t al tiempo t se obtiene mediante el siguiente procedimiento de normalización (22):

$$\xi_t = \frac{\left[s_t(i) - \min_j s_{t-1}(j) \right]_+}{\max_k \left[s_t(k) - \min_j s_{t-1}(j) \right]_+ + 1}, \quad u_t = x(i) \quad (\text{Ec. 21})$$

donde:

$$s_t(i) = \frac{\sum_{i=1}^n q_i \chi(u_i = x(i))}{\sum_{i=1}^n \chi(u_i = x(i))}, i = 1, \dots, N \quad (\text{Ec. 22})$$

y

$$[x]_+ := \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \chi(u_t = u(i)) := \begin{cases} 1, & \text{si } u_t = u(i) \\ 0, & \text{si } u_t \neq u(i) \end{cases} \quad (\text{Ec. 23})$$

Considérese el autómata descrito anteriormente para seleccionar el punto $x(\alpha)$, el cual corresponde (en algún sentido) al valor mínimo de la función multimodal $r(x_n)$ sobre el conjunto X . Este proceso puede ser organizado como se muestra en la fig 3. Como se puede observar en este caso no es necesario conocer toda la estadística de la perturbación w_t .

Para adaptar este proceso a nuestra estructura de optimización se puede seleccionar $q_t = D_n^N u_t = N_n$ donde N_n es el número de nodos seleccionados in RNAP al tiempo t . De tal forma que q_t representa

la función de pérdida conjunta y u_t el orden del modelo a ser seleccionado. Nótese que en este caso se obtiene únicamente un punto de x_t en cada instante de tiempo t (cada iteración) para calcular el valor mínimo de la función $r(x)$. Finalmente, se genera la secuencia $u_t = N_n$ de acuerdo a la distribución de probabilidad p_t , la cual se modifica en cada instante t de acuerdo al esquema de reforzamiento (Ec. 18) con el procedimiento de normalización (Ec. 21).

Cuando el número de intervalos N es demasiado grande se sugiere que se divida en dos secciones y así sucesivamente, para disminuir el proceso de búsqueda. En este caso se utilizó un Automata de dos secciones; en la primera se dividió el intervalo en dos segmentos y en cada segmento se consideraron todos los intervalos para mejorar la convergencia y disminuir el tiempo de cálculo.

Los pasos de este algoritmo son los siguientes:

1. Generar la señal de control u_t utilizando una función de distribución inicial p_t y un número de observaciones.
2. Calcular la función D_n^N solamente para el punto $N_n = u_t$.
3. Regresar al paso 2 hasta que una de las probabilidades tienda a 1.

En este proceso se selecciona una y otra vez el número de nodos N_t el cual corresponde al punto mínimo de D_n^N . La probabilidad que tienda a 1 cuando $t \rightarrow \infty$ corresponde al valor de $(N_n)^*$ que minimiza la función de pérdida conjunta D_n^N , es decir, $(N_n)^*$ es el número óptimo de nodos de RNAP.

EJEMPLOS

Para ejemplificar la teoría desarrollada en secciones anteriores se utilizaron las ecuaciones de Lorenz para generar una serie de tiempo que fuera aproximada por RNAP. La serie utilizada se muestra en la fig. 4. Considerando $ndo=3$ y una desviación estándar $\sigma_\zeta=1$ para la perturbación la fig. 5 muestra la evolución de las componentes de p_t . Como se puede observar la componente que tiende a 1

corresponde al intervalo del número óptimo de nodos de RNAP. Los resultados de simulación muestran que esto se obtiene alrededor de las 500 iteraciones del proceso de aprendizaje. El esquema de reforzamiento (Ec. 19) selecciona únicamente la acción de control $u_t = 15$. Para ejemplificar la forma en que esto sucede se obtuvo el histograma de la acción de control. (Recuérdese que el autómata es de dos secciones y u_t es el valor del primer intervalo más lo obtenido en el segundo intervalo).

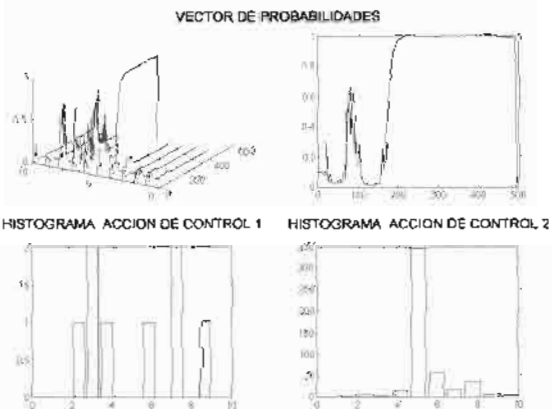
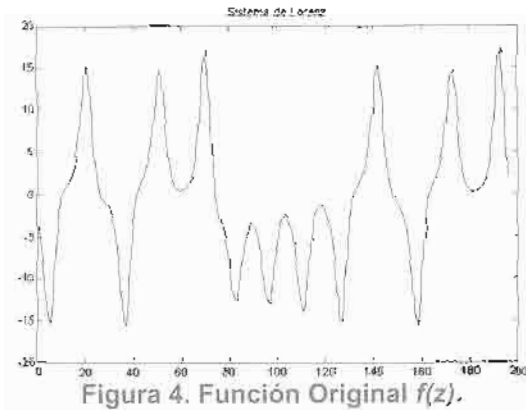


Figura 5. Vector de Probabilidad e Histograma de la acción de control utilizando $\sigma_\zeta=1.0$



Figura 6. Vector de Probabilidad e Histograma de la acción de control utilizando $\sigma_\zeta=5.0$



En la fig. 6 para $\sigma_{\zeta}=5$ la acción de control u_t es igual a 11. Como se puede observar cuando la varianza de la perturbación se incrementa el número óptimo de nodos disminuye.

CONCLUSION

En este trabajo se propuso un proceso de aprendizaje para obtener el número óptimo de nodos en RNAP utilizando el esquema de reforzamiento de Bush-Mosteller y el criterio de la función de pérdida (A partir del criterio de Akaike). De este análisis se puede observar cómo en ciertos casos la aproximación de una función no mejora si se aumenta el número de términos de la aproximación y es posible encontrar el número óptimo de nodos o términos.

El mismo esquema se puede utilizar para aproximaciones similares como puede ser el caso de la Transformada de Fourier, Método de Máxima Entropía, Transformada de Walsh, etc..

AGRADECIMIENTOS

Se agradece la colaboración de Stalin Muñoz y Walterio Mayol del laboratorio LINDA de la UNAM por sus comentarios y aportaciones para mejorar el algoritmo de RNAP.

REFERENCIAS

1. Alexander, I., Introduction to neural nets. Chapter 9 in *Applied Artificial Intelligence*, ed. K. Warwick, Peter Peregrinus Ltd., 1991.
2. Chang, T. & Abdel-Ghaffar, K., A Universal Neural Net with Guaranteed Convergence to Zero System Error. *IEEE Transactions on signal processing*, Vol. 40, no. 12, December 1992.
3. Pineda, F. J., Recurrent Backpropagation and the Dynamical Approach to Adaptive Neural Computation. *Neural Computation*, No.1, pp.161 - 172, 1989.
4. Simpson, P. K. *Artificial Neural Systems*. Pergamon Press, N.Y., 1989.
5. Bhat, N. and T. J. Mc-Avoy, Use of Neural Nets for Dynamic Modeling and Control of Chemical Process Systems. *Computers Chem. Eng.*, No.14, pp.573-583, 1990.
6. Chen S. & Billings S., Neural networks for nonlinear dynamic system modeling and identification, *Int. J. Control*, vol. 56, no. 2., 1992.
7. Narendra, K. S. and K. Parthasarathy. Identification and Control of Dynamical Systems Using Neural Networks. *IEEE Trans. Neural Networks*, No.1, pp.4-27, 1990.
8. Poznyak, A. S., K. Najim and M. Chtourou. Use of recursive stochastic algorithm for neural networks synthesis. *Appl. Math. Modelling*, vol.17, August, pp. 444 - 448, 1993.
9. Bebis, G. & Georgiopoulos. "Feed-forward neural networks". *IEEE Potentials*, October/ November, 1994
10. Huang, S.C. and Y.F. Huang, "Bounds on the number of hidden neurons in multilayer perceptrons", *IEEE Trans. Neural Networks*, Vol. 2 pp. 47-55, 1991.
11. Albrecht, T.; Matz, G. & Hildermann, J. "An Intelligent gas sensor system for the identification of hazardous airborne compounds using an array of semiconductor gas sensors and Kohonen Feature Map Neural Networks. *Intelligent Systems Engineering*, Conference Publication No. 395, 5-9 September 1994
12. Syam, M. M., A Neural Expert System for Diagnosing Eye diseases *Proceedings of the Tenth Conference on Artificial Intelligence for Applications*, San Antonio TX, USA, 1-4 March, 1994.
13. Alfonzetti, S.; Coco, S.; Cavalieri, S. & Malgeri, M., Automatic Mesh Generation by the Let-It-Grow Neural Network. *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 32 No. 3 May 1996.
14. Barron, A. R., Universal Approximation in Bounds for Superpositions of a Sigmoidal Function. *IEEE Transactions on Information Theory*. Vol. 39 No. 3 May, 1993.
15. Fang, Y. and T. J. Sejnowski. «Faster Learning for Dynamic Recurrent Backpropagation». *Neural Computation*, No.2, pp.270 - 273, 1990.

16. Govind, G. & Ramamoorthy, P., An Adaptive-Topology Neural Architecture and Algorithm, for Nonlinear System Identification. *IEEE ICNN*, 28 march-1 april, San Francisco Ca, USA, 1993
17. Huang, Q. & Liu, R. a Neural Computation for Canonical Representations of nonlinear Functions, *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, New Orleans, USA, 1-3 May, 1990
18. Marchesi, M.; Orlandi, G. Piazza, F & Uncini A., Neural Networks with self-adaptive topology, *IEEE International symposium on Circuits and Systems*, Singapore, 11-14 June 1991.
19. Poznyak, A.S. & Gómez-Ramírez, E., 1994, How to select the number of nodes in artificial neural networks. *AMCA/IEEE Int. Workshop on Neural Networks Applied to Control and Image Processing*, Mexico City.
20. Najim, K. & Poznyak, A.S., 1994, *Learning Automata: Theory and Applications* (Oxford, U.K.: Pergamon Elsevier Sciences).
21. Narendra & Thathachar, M. A. L., 1989, *Learning Automata- An Introduction* (Englewood Cliffs, NJ:Prentice Hall).
22. Poznyak, A. S., K. Najim & M. Chtourou. "Learning Automata with continuous inputs and their application for multimodal functions optimization". *International Journal of Systems Science*, 1996, volume 27, number 1, pages 87-95.
23. Poznyak, A. S., K. Najim & E. Ikonen. "Adaptive Selection of the optimal order of linear regression models using learning automata". *International Journal of Systems Science*, 1996, volume 27, number 1, pages 151-159.
24. Park D. & Zhu Y., Bilinear Recurrent Neural Network, *IEEE International Conference on Neural Network*, p. 1459-64, vol. 3, Orlando, Florida, 27 june-2 july 1994.
25. Chang C., Lin J.; & Cheung J., Polynomial and Standard Higher Order Neural Network. *IEEE International Conference on Neural Networks*. p. 989-94 vol.2, San Francisco, CA, USA, 28 March-1 April 1993.
26. Liang, P. & Jamali, N., Artificial Neural Networks with Nonlinear Synapses and Nonlinear Synaptic Contacts. *IEEE Int. Conf. On Systems, Man and Cybernetics*, 18-21 oct., p. 1043-8, vol. 2, Chicago IL, USA, 1992.
27. Si J. & Michel A. N., Analysis and Synthesis of a Class of Discrete-Time Neural Networks with Nonlinear Interconnections, *IEEE Transactions on Circuits and systems*, vol. 41, no.1, January 1994.
28. Alippi C. & Piuri V., Experimental Neural Networks for Prediction and Identification, *IEEE Transactions on Instrumentation and measurement*, vol. 45, no. 2 april 1996.
29. Chen S. & Billings A., Recursive Prediction error parameter estimator for non-linear models, *Int. J. Control*, vol. 49, no. 2, 1989.
30. Chen S. & Billings S., Representations of non-linear systems: the NARMAX model, *Int. J. Control*, vol. 49, no. 3, 1989.
31. Leontaritis Y. & Billings S., Input-output parametric models for non-linear systems, *Int. J. Control*, vol. 41, no. 2, 1985.
32. Shin Y. & Gosh J., Approximation of Multivariate Functions Using Ridge Polynomial Networks, *ICNN*, p. 380-5, Baltimore, MD, USA, 7-11 June 1992
33. Shin Y., Modified Bernestein Polynomials and Their Connectionist Interpretation, *ICNN*, p. 1433-8, vol. 3, Orlando, Florida, USA, 27 June-2 july 1994.
34. Ivakhnenko A., Polynomial Theory of Complex systems, *IEEE Transactions on systems, Man and Cybernetics*, vol. SMC-1, no. 4 October 1971.
35. Bose, N. K., *Applied Multidimensional Systems Theory*, Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1982.
36. Gómez-Ramírez E. & Poznyak A., Structure Adaptation of Stochastic Neural Nets using Learning Automata Technique. *International Journal of Systems Science*. (to be published), 1998
37. Verulava, Yu. Sh. and B. T. Polyak. Selecting the order of a regression model. *Avtomatika i Telemekhanika*, No.11, pp.113 - 129, 1988.