

ESTIMACION DEL PRECIO DE UN TITULO OPCIONAL MEDIANTE UNA RED NEURONAL ARTIFICIAL

Guillermo Pérez Elizalde, Egresado de la Escuela de Ingeniería Universidad La Salle
y Eduardo Gómez Ramírez
Laboratorio de Investigación y Desarrollo de Tecnología Avanzada LIDETEA
Posgrado e Investigación, Universidad La Salle
Benjamín Franklin No. 47 Col. Condesa
CP 06140, México, D.F., México E-mail: egomez@aldebaran.ci.ulsal.mx

RESUMEN

Títulos Opcionales (TO's) es la denominación que las autoridades del Mercado Mexicano de Valores le dieron a los instrumentos que internacionalmente se denominan "Warrants". Uno de los modelos más utilizados para la valuación de estos instrumentos es el propuesto por Black & Scholes, el cual es utilizado en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) para el cálculo del precio teórico de los TO's.

En este trabajo se presenta el diseño de un modelo de Red Neuronal Artificial (RNA) para estimar el precio de cierre de un Título Opcional (TO). Para demostrar la potencialidad de estimación de la RNA se realizan análisis de regresión y de varianza, por un lado entre los precios de cierre y la estimación del modelo de Black & Scholes (B&S), y por otro lado entre los precios de cierre y la estimación hecha por la RNA.

ABSTRACT

Títulos Opcionales (TO's) is the name that the Mexican Stock Market authorities have given to the financial instruments that have been internationally called Warrants. The model proposed by Black & Scholes is one of the most widely used models for valuing these financial instruments and which is used by the Mexican Stock Exchange (BMV) for calculating the theoretical price of the TO's.

The design of a model of an Artificial Neural Network (RNA) for estimating the closing price of a TO is shown in this paper. In order to demonstrate the potential estimate of the RNA, several regression and variance analyses are carried out. At first are comparing the closing prices and the estimate calculated by the Black & Scholes model, and then are comparing the closing prices and the estimate calculated by the RNA.

INTRODUCCION

Los TO's pertenecen a una familia de instrumentos financieros llamados productos derivados, los cuales surgen como un mecanismo de cobertura del riesgo ante la inestabilidad de los mercados y la elevada volatilidad de los precios. La característica principal de estos instrumentos es que su precio está asociado al precio de otro instrumento financiero al que se denomina activo subyacente.

Recientemente diversos investigadores han observado algunas limitaciones en los modelos financieros que dependen de la distribución normal y/o varianza finita, entre los que se encuentra el modelo de Black & Scholes (1973).

Por un lado E. Peters [1] comenta "la naturaleza fractal"¹ de los mercados de capitales contradice la Hipótesis de Mercados Eficientes (HME) y todos los modelos cuantitativos que se derivan de ésta. Esto explica que estos modelos fallan porque simplifican la realidad asumiendo comportamiento aleatorio e ignoran la influencia del tiempo en la toma de decisiones.

Andre Lo [2] refuta la HME y señala que existen relaciones muy complejas entre los activos financieros a lo largo de muchos y diferentes puntos en el tiempo.

H. Ahmadi [3] estudia los problemas del

¹ Un fractal es un objeto en el cual las partes están de alguna manera relacionadas hacia un todo, es decir, los componentes individuales son similares entre ellos.



modelo APT (Arbitrage Pricing Theory) usando una RNA para investigar simultáneamente el efecto de algunas variables sin conocer las distribuciones de probabilidad de cada variable.

Mandelbrot [4], [5], [6] (mucho más conocido quizá por haber iniciado el estudio de las curvas fractales en matemáticas) propone que los precios tienen una distribución de Pareto estable.

Hull [7] propone modelos en los que la desviación estándar de los precios es a su vez volátil.

Herb Johnson & David Shanno [8] comentan: "El modelo de Black & Scholes supone que el precio del activo subyacente sigue el movimiento geométrico browniano, y esto implica que el precio de un activo subyacente tiene una distribución log-normal por lo que la tasa de rendimiento es normalmente distribuida". Lo anterior implica que de acuerdo al teorema del límite central, la distribución de cambios de precios diarios de las acciones (las cuales son sumas de muchos cambios de precios intra-día) debería ser aproximadamente normal.

Sin embargo, las condiciones del teorema pueden no ser cumplidas debido a:

- a) Los cambios de precios pueden no tener una varianza finita [9], [10].
- b) El número de efectos individuales sumados al mismo tiempo para dar el cambio del precio diario puede ser en sí mismo aleatorio [11], [12] dando origen a procesos subordinados.

Hay también considerable evidencia de que las varianzas cambian sobre el tiempo [13], [14], [15], [16].

Por lo anterior es apropiado examinar modelos de valuación de opciones que permitan que la varianza cambie. Los científicos de la Cibernética en su afán por convertir a esta ciencia en una herramienta que auxilie al hombre en el estudio de los sistemas dinámicos complejos que se caracterizan por su comportamiento no lineal, propone analizar el Mercado de Valores como un sistema complejo, dinámico, viable y adaptable. [17]

Las Redes Neuronales Artificiales (RNA) son

modelos matemáticos que poseen las características anteriores, cuya potencialidad principal es la de aproximar relaciones complejas no lineales.

Una muestra de la motivación para estudiar el Mercado de Valores con el enfoque de la Cibernética son los trabajos de:

- a) John Kean [18] en el que comenta que los mercados financieros pueden apreciarse como sistemas dinámicos no-lineales y las RNA's pueden ser usadas para analizar y medir patrones de comportamiento en la variación de precios.
- b) Mayer & Feliz [19] en el que muestran la no presencia de caos pero si la fuerte evidencia de dinámica no lineal de los índices de precios de México (IPC), Nueva York (Dow Jones) y Tokio (Nikey) durante el período que comprende del 12 de Enero de 1986 al 23 de Febrero de 1990.
- c) Edgar Peters [1] en el que demuestra la existencia de un atractor caótico para el S&P 500.
- d) Herbert A. Simon [20] en el que opina que un sistema puede generalmente ser conducido con más precisión si éste usa alimentación anticipada ("feedforward") en combinación con retroalimentación para corregir los errores del pasado.

Entre las aplicaciones de RNA's en los mercados de derivados internacionales se encuentran los siguientes:

- a) Mary Malliaris & Linda Salchenberger [21] demuestran la habilidad de una RNA para estimar los precios de una opción financiera.
- b) Hutchinson, Lo and Poggio [22] estudian la limitación del modelo de Black & Scholes y proponen una RNA para la valuación y cobertura de los productos derivados cuando las dinámicas del precio de los activos subyacentes son desconocidas y la ecuación de valuación asociada con la condición de no-arbitraje no puede ser solucionada analíticamente.
- c) David L. Kelly [23] muestra la aplicación de una RNA para la valuación y cobertura de opciones de venta.
- d) Milliaris & Salchenberger [24] muestran la potencialidad de las RNA para la predic-

ción de la volatilidad implícita de las opciones financieras.

El modelo de B&S supone que la distribución de probabilidad de las cotizaciones futuras del activo subyacente es log-normal y que la volatilidad del rendimiento de dicho activo es constante, pero esto no siempre se cumple, por lo que es necesario implementar un modelo que tenga la habilidad para capturar la dinámica del activo subyacente con un mínimo de supuestos.

Debido a la necesidad de construir modelos de valuación de opciones financieras que permitan que la varianza cambie y dada la potencialidad de las RNA's para aproximar funciones no lineales, en el presente trabajo se formula la siguiente hipótesis. ¿ El empleo de RNA's para la estimación de precios de cierre de los TO's permite obtener mejores resultados que el modelo de B&S ?

El estudio de tecnologías inteligentes y su implantación en nuestro país para el estudio de nuevos mercados financieros adquiere gran importancia no sólo por la necesidad de responder a las exigencias del proceso de globalización financiera en materia de innovaciones tecnológicas de instrumentos financieros y de técnicas de análisis de la información, sino también por el hecho de que las comunidades mexicanas académicas e industrial del ramo computacional y financiero puedan participar en la evaluación y aplicación dichas tecnologías.

El presente trabajo representa un esfuerzo en este sentido y tiene como objetivo analizar la problemática de B&S y presentar el desarrollo de una RNA para la estimación de precios de cierre de un TO listado en la BMV como una alternativa de solución, presentando dos casos:

- 1) Cuando la RNA obtiene mejores estimaciones que el modelo de B&S.
- 2) Cuando el modelo de B&S obtiene mejores estimaciones que la RNA.

Este estudio puede ser aplicable a otros instrumentos derivados, activos subyacentes y modelos de valuación de activos financieros que dependen de la distribución normal y/o varianza finita. En particular se sugiere el empleo de una RNA para la estimación de precios de los futuros sobre índices financieros, tipos de cambio y ta-

sas de interés que cotizarán en el Mexder (Mercado Mexicano de Derivados estandarizado).

El trabajo está estructurado de la siguiente forma:

En la primera sección se describen los fundamentos de valuación de los TO's.

En la segunda sección se revisan los fundamentos de las RNA's y se desarrolla un simulador del algoritmo de aprendizaje "backpropagation", el cual se utiliza para el entrenamiento y prueba de las RNA's diseñadas en el capítulo cuatro.

En la tercera sección se describe la metodología de diseño de una RNA y el diseño de una RNA para la estimación de precios de cierre de un TO listado en la BMV

Por último se presentan las conclusiones y trabajo futuro.

FUNDAMENTOS DE VALUACION DE LOS TITULOS OPCIONALES

Los Títulos Opcionales (TO's) son aquellos documentos susceptibles de oferta pública y de intermediación en el Mercado de Valores, que confieren a sus tenedores, a cambio del pago de una prima de emisión, el derecho de comprar (Si se trata de un TO de compra) o el derecho de vender al emisor (Si se trata de un TO de venta):

- a) Un número de acciones del activo de referencia
- b) Un número de acciones de un grupo o canasta de referencia

ó bien de recibir del emisor una determinada suma de dinero resultante de la variación del índice de precios de referencia, a un cierto precio llamado precio de ejercicio y durante un período de tiempo determinado.

De acuerdo al tipo de derecho que otorga el contrato los TO's pueden ser:

- a) De Compra (Call): Si el tenedor tiene el derecho de comprar.
- b) De Venta (Put): Si el tenedor tiene el derecho de venta.

De acuerdo al periodo dentro del cual se puede ejercer el derecho, los TO's pueden ser de tipo:

- c) Americano: Es aquel TO que puede ejercerse en cualquier momento anterior a su vencimiento.
- d) Europeo: Es aquel TO que puede ejercerse sólo en la fecha de su vencimiento. [25]

El precio corriente de mercado de una acción de referencia es el precio actual determinado por la oferta y demanda existente en el mercado secundario en cuestión, por lo que de manera más específica los TO's de compra otorgan a sus tenedores, el derecho de:

1. Adquirir del emisor las acciones o canasta de referencia; ó
2. Recibir del emisor la suma de dinero que resulte de la diferencia positiva determinada en la fecha de ejercicio, entre el precio corriente de mercado de la acción de referencia o del conjunto de acciones de la canasta de referencia, según sea el caso, y el precio de ejercicio; ó
3. Recibir del emisor la suma de dinero que resulte de la diferencia positiva determinada en la fecha de ejercicio, entre el valor de mercado del índice de referencia expresado en términos monetarios y el precio de ejercicio.

y los TO's de venta otorgan a sus tenedores el derecho de:

1. Vender al emisor las acciones o canasta de referencia; ó
2. Recibir del emisor la suma de dinero que resulte de la diferencia positiva determinada en la fecha de ejercicio, entre el precio de ejercicio y el precio corriente de mercado de la acción de referencia o del conjunto de acciones de la canasta de referencia según sea el caso; ó
3. Recibir del emisor la suma de dinero que resulte de la diferencia positiva determinada en la fecha de ejercicio, entre

el precio de ejercicio y el valor de mercado del índice de referencia expresado en términos monetarios.

En caso de que el precio corriente de mercado se muestre en contra de las expectativas del tenedor y éste no ejercite el derecho que le otorgó un TO, entonces perderá la prima que pagó por un TO. [26]

Con el objeto de facilitar la explicación del manejo de los TO's, en lo sucesivo se citará como activo subyacente cuando se trate de una acción de referencia ó canasta de acciones de referencia ó índice de precios de referencia.

Al combinar los dos tipos de contratos (compra, venta) y las dos posiciones que pueden tomar las partes contratantes (tenedor, emisor) da como resultado las siguientes cuatro posibles transacciones que se pueden realizar con los TO's.

- a) Comprar un TO de compra: Posición larga en un TO de compra (Fig. 1), es decir adquirir el derecho de comprar el activo subyacente a un cierto precio (X) a cambio del pago de una prima (C).

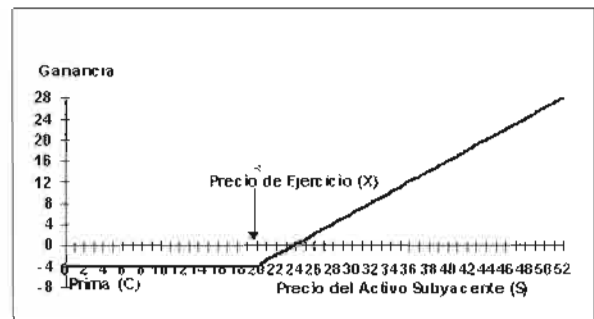


Fig. 1 Posición larga en un TO de compra

- b) Comprar un TO de venta: Posición larga en un TO de venta (Fig. 2), es decir adquirir el derecho de vender el activo subyacente a un cierto precio (X), a cambio del pago de una prima (P).

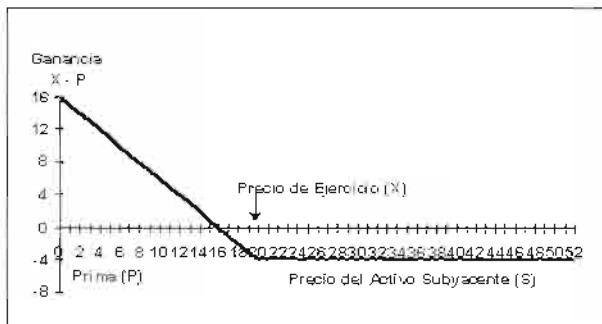


Fig. 2 Posición larga en un TO de venta

c) Vender un TO de compra: Posición corta en un TO de compra (Fig. 3), es decir adquirir el compromiso de vender el activo subyacente a un cierto precio (X), a cambio del cobro de una prima (C).

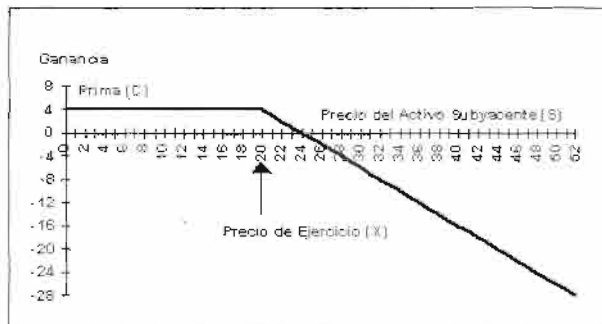


Fig. 3 Posición corta en un TO de compra

d) Vender un TO de venta: Posición corta en un TO de venta (Fig. 4), es decir adquirir el compromiso de comprar el activo subyacente a un cierto precio (X), a cambio del cobro de una prima (P).

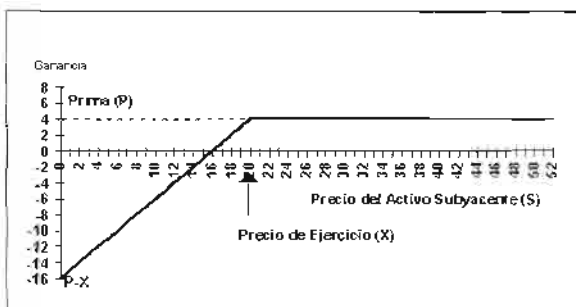


Fig. 4 Posición corta en un TO de venta

La elección de alguna de ellas dependerá de las expectativas que el inversionista tenga sobre la evolución del precio del activo subyacente y del riesgo que quiera asumir. [27]

Al igual que en los activos financieros clásicos en las opciones existen dos tipos de valores:

- a) Valor de mercado (VM): Es el precio corriente de mercado. Si existe una oferta importante el precio de las TO's bajará, mientras que si la demanda es la elevada el precio de los TO's subirá.
- b) Valor teórico (VTO): Es determinado por una serie de parámetros que desde un punto de vista teórico influyen de manera decisiva en el valor del TO en cuestión.

Ambos valores pueden coincidir si el mercado secundario de TO's se comporta de manera eficiente, es decir si sus precios reflejan toda la información relevante para la formación de expectativas, en cuyo caso el VTO será su precio de mercado.

En el caso de que el mercado sea ineficiente existirá una desviación entre el VTO y el VM del TO y el signo nos indicará si está sobrevalorado o infravalorado por el mercado, de ahí la importancia de conocer el valor teórico de un TO.

El VTO puede definirse como:

$$VTO = VI + VT \quad (\text{Ec. 1})$$

Donde VI es el valor intrínseco y representa el beneficio inmediato que el comprador del TO puede obtener a través del ejercicio del TO. Puede expresarse como la diferencia entre el precio del activo subyacente(S) y el precio de ejercicio del TO (X).

Para el caso de un TO de compra:

$$VI = \text{MAX}(0, S-X) \quad (\text{Ec. 2})$$

Para el caso de un TO de venta:

$$VI = \text{MAX}(X-S, 0) \quad (\text{Ec. 3})$$

Donde VT es el valor tiempo y representa las expectativas de los inversionistas en TO's, las cuales en el caso de un comprador de un TO de compra serán alcistas, en el caso de un comprador de un TO de venta serán bajistas.

En función del valor intrínseco las TO's se pueden clasificar en tres categorías.



a) Dentro de Dinero (ITM, In the Money): Son aquellos cuyo valor intrínseco es positivo, esto es:

Para el caso de un TO de compra $S > X$
 Para el caso de un TO de venta $X > S$

b) En el Dinero (ATM, At the Money): Son aquellos cuyo precio de ejercicio es igual al precio del activo subyacente por lo que su valor intrínseco es cero, esto es:

Para el caso de un TO de compra $S = X$
 Para el caso de un TO de venta $X = S$

c) Fuera de Dinero (OTM, Out of the Money): Son aquellos que en términos analíticos su ejercicio implica una pérdida, por lo que su valor intrínseco es cero, esto es:

Para el caso de un TO de compra $S < X$
 Para el caso de un TO de venta $X < S$

Los TO's OTM sólo tienen VT, por lo que tanto el emisor como el tenedor sólo consideran la evolución favorable de los precios del activo subyacente. Los TO's ITM son los que tienen el menor VT.

Los TO's ATM son los que tienen el máximo VT, ya que cuando se valora un TO asumimos que el mercado es eficiente, es decir que los precios reflejan plenamente toda la información relevante del correspondiente activo, bajo este supuesto la mejor estimación del precio futuro sería el precio actual y los precios tendrían una distribución normal, tal como se presenta en la Fig. 5.

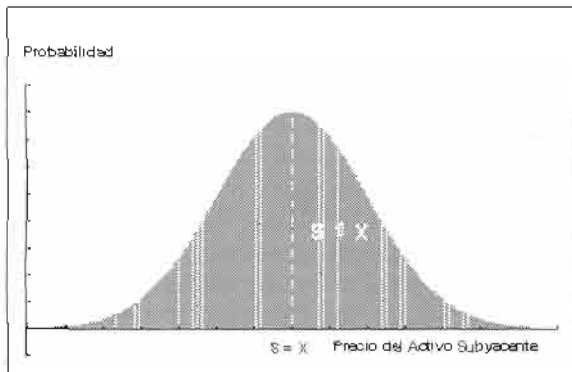


Fig. 5 Distribución de probabilidad de los precios del activo subyacente. (TO ATM)

En la Fig. 5 el área marcada con $S \hat{=} X$ representa la probabilidad de que $S > X$, es decir cuando un TO de compra este ITM existe una probabilidad de aproximadamente el 50% de obtener beneficios en su ejercicio.

En la Fig. 6 se muestra como en un TO ITM existen probabilidades de ganar más VI (área marcada con $S \hat{=} X$), pero también existe la posibilidad de perder parte del valor intrínseco actual con una evolución desfavorable de los precios (área marcada con $X \hat{=} S$) por lo que siempre el VT de un TO ITM será inferior al VT de un TO ATM.

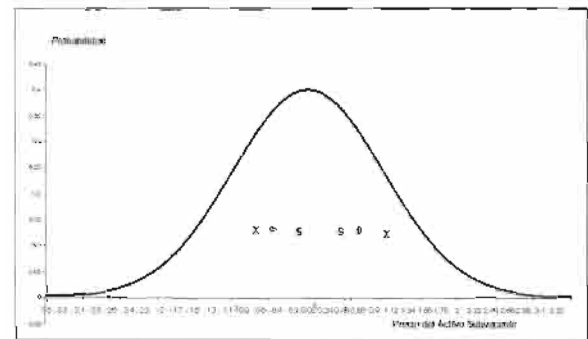


Fig. 6 Distribución de probabilidad de los precios del activo subyacente. (TO ITM)

El caso de un TO OTM se muestra en la Fig. 7, en la cual se observa como el área marcada con $X \hat{=} S$ es inferior a la correspondiente marcada con $S \hat{=} X$ de la Fig. 5, es decir su VT es inferior al de un TO ITM.

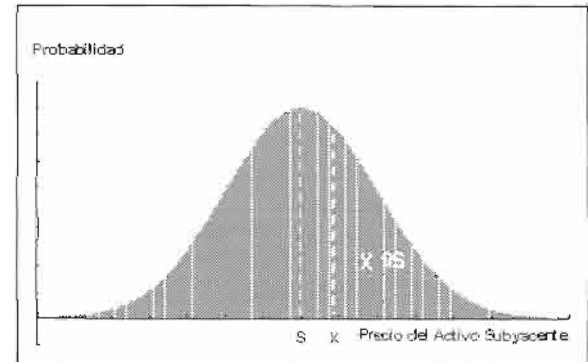


Fig. 7 Distribución de probabilidad de los precios del activo subyacente. (TO OTM)

Para los TO's de venta se puede observar cómo cuando un TO comienza a estar ITM el VT

de la TO se anula. Esto se debe a que en el caso de los TO's de venta europeas, el valor tiempo puede llegar a ser negativo. En las Figs. 8 y 9 se muestra la evolución del VTO, del VI y del VT en función al precio del activo subyacente.

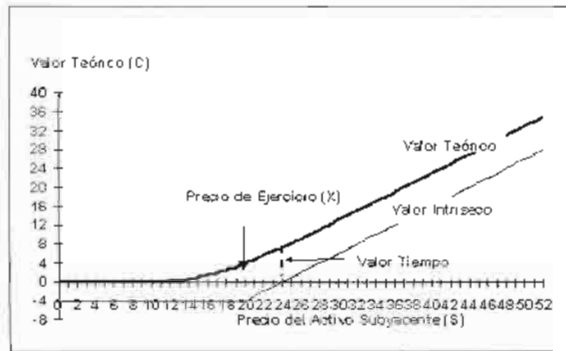


Fig. 8. Comportamiento del valor teórico de un TO de compra.

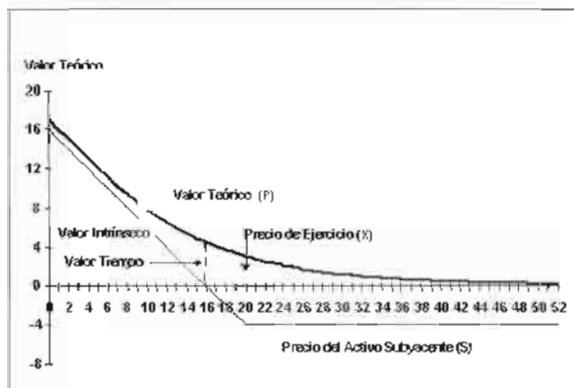


Fig. 9. Comportamiento del valor teórico de un TO de venta.

Si S es la variable en cuestión entonces su proceso de Ito es:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz \quad (\text{Ec. 4})$$

El proceso más habitual para describir la evolución del precio de una acción o de una divisa es el llamado "Movimiento geométrico browniano" (Fig. 10)

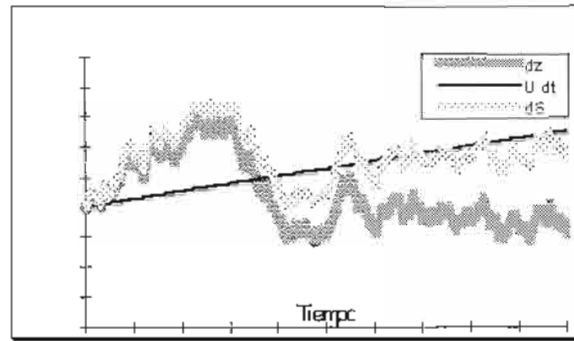


Fig. 10. Movimiento geométrico browniano

Para la valuación de los TO's la BMV en la nota metodológica del boletín bursátil "Sección Análisis y Valuación de instrumentos del Mercado de Capitales" establece que el precio del subyacente es el precio actualizado para la valuación del mercado accionario.

El modelo de Black & Scholes.

El modelo de Fisher Black & Myron Scholes publicado en 1973 fue concebido inicialmente para valorar opciones europeas sobre acciones de tipo europeo.

Las hipótesis básicas del modelo son:

1. Mercado financiero perfecto, en el sentido de que los inversionistas pueden pedir prestados los recursos monetarios que necesiten, sin limitación alguna, a la vez que prestar sus excedentes de liquidez al mismo tipo de interés sin riesgo, el cual es conocido y se considera constante en el periodo estimado.
2. Inexistencia de costos de transacción y de información.
3. Ausencia de impuestos.
4. No consideración del dividendo que pueda recibir la acción, durante el periodo de vida de la opción.
5. Se trata de un mercado de negociación continua.
6. La distribución de probabilidad de las cotizaciones futuras de las acciones es logarítmico-normal y la varianza (volatilidad) del rendimiento de las acciones es constante por unidad de tiempo del periodo.

Este modelo descansa sobre el principio de la formación de una cartera sin riesgo, compuesta por opciones europeas sobre acciones y por las



acciones que constituyen el activo subyacente de dichas opciones.

Según la fórmula de la Ec. 2, el valor actual del VI referido al momento t en el cual se adquiere una opción de compra y utilizando la fórmula de descuento en el campo continuo sería:

$$VI^{e^{-rt}} = (S - X)e^{-rt} \quad (\text{Ec. 5})$$

donde:

- S = Precio del activo subyacente
- X = Precio de ejercicio de la opción
- r = Tasa de interés
- e = 2.7182818

Según la fórmula anterior se puede afirmar que el VTO en el tiempo t es igual a la diferencia entre el valor del activo subyacente y el precio de ejercicio de la opción traído a valor presente.

Con el fin de reflejar la incertidumbre que existe de que la opción tenga VI, la fórmula de Black & Scholes incorpora las probabilidades de que se tenga VI.

Asimismo, para eliminar el riesgo asociado a los efectos del cambio de precio de las acciones, Black & Scholes proponen en su modelo la formación de una cartera formada por la combinación adecuada de una posición larga en acciones y una posición corta en opciones emitidas sobre tales acciones.

Si consideramos un sólo período y simbolizamos por p la probabilidad de aumento del precio de la acción a S_1 y por $1-p$ la probabilidad de baja del precio de la acción a S_2 , y por C_1 y C_2 el precio de la opción de compra como consecuencia del aumento o disminución del precio de la acción, al cual se refiere la opción de compra, al cociente entre la variación de precio de la opción de compra y la variación del precio de la acción se denomina "hedge ratio" (h) y se expresa de la siguiente manera.

$$h = \frac{C_1 - C_2}{S_1 - S_2} \quad (\text{Ec. 6})$$

De manera que si no queremos correr riesgos, sea cual sea la variación en el precio de la acción, la proporción entre acciones poseídas y opciones emitidas debe ser h , ya que el resultado positivo o negativo de la opción se compensa con el resultado positivo o negativo de la acción. La rentabilidad de la cartera será independiente de los cambios en los precios de la acción.

Si suponemos que el precio de la acción es una variable aleatoria en el campo continuo, que sigue una distribución de probabilidad logarítmico-normal con una media y una varianza constantes, el riesgo es también nulo cuando se ajusta continuamente la posición de cobertura h .

Bajo este supuesto fue definida la siguiente fórmula de valoración de opciones de compra (C) y opciones de venta (P) de tipo europeo que no paga dividendos.

$$C = SN(d_1) - Xe^{-rt} N(d_2) \quad (\text{Ec. 7})$$

$$P = Xe^{-rt} N(-d_2) - SN(-d_1) \quad (\text{Ec. 8})$$

siendo:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}} \quad (\text{Ec. 9})$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t} \quad (\text{Ec. 10})$$

donde:

- C = Valor de una opción de compra
- P = Valor de una opción de venta
- S = Precio del activo subyacente
- X = Precio del ejercicio de la opción

$N(d_1)$ y

$N(d_2)$ = Funciones de densidad de las variables. d_1 y d_2

N = Distribución normal acumulativa

r = Tasa de interés libre de riesgo

t = Tiempo que falta hasta el vencimiento de la opción

σ = Volatilidad del activo subyacente

Para el caso en el cual el activo subyacente si paga dividendos continuos la formula de valoración de opciones de compra y opciones de venta de tipo europeo es :[28]

$$C = Se^{-qt} N(d_1) - Xe^{-rt} N(d_2) \quad (\text{Ec. 11})$$

$$P = Xe^{-rt} N(-d_2) - Se^{-qt} N(-d_1) \quad (\text{Ec. 12})$$

siendo:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}} \quad (\text{Ec. 13})$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t} \quad (\text{Ec. 14})$$

donde:

q = Tasa anualizada de rendimientos por dividendos

FUNDAMENTOS DE REDES NEURONALES ARTIFICIALES

Las RNA's son modelos matemáticos que se han desarrollado para estudiar la mente y la actividad cerebral.

Hecht-Nielsen define formalmente una RNA como una estructura de procesamiento paralelo distribuido de información, constituida por unidades de proceso (UP), los cuales están interconectados con señales de canal unidireccional llamadas conexiones. Cada UP tiene una conexión de salida simple que se ramifica en muchas conexiones colaterales en la medida que se desee.

La señal de salida de cada UP puede ser de algún tipo de señal matemática. El procesamiento que ocurre dentro de cada UP debe ser completamente local y puede depender únicamente de los valores comunes de la señal de entrada que llegan a la UP por la vía de sus conexiones y de los valores almacenados en los elementos de procesamiento de memoria local.

Cada neurona i -ésima está caracterizada en cualquier instante por un valor numérico denominado estado de activación $a_i(t)$ asociado a cada UP, existe una función de salida f_i que transforma el estado actual de activación en una señal de salida y_i .

Dicha señal es enviada a través de los canales de comunicación unidireccionales a otras unidades de la red, en estos canales la señal se modifica de acuerdo con la sinapsis w_{ij} asociada a cada uno de ellos según una determinada regla de aprendizaje. Las señales moduladas que han llegado a la unidad j -ésima se combinan entre ellas generando así la entrada total Net_j .

$$Net_j = \sum_i y_i w_{ij} \quad (\text{Ec. 15})$$

Una función de activación F determina el nuevo estado de activación $a_i(t+1)$ de la neurona considerando la entrada total calculada y el anterior estado de activación $a_i(t)$.

Una unidad de proceso también referenciado como: nodo, unidad de memoria a corto plazo, neurona y unidad lógica de umbral, es el componente de una RNA en donde se lleva a cabo el proceso de computación. Si se tienen N unidades es posible designar la j -ésima unidad como U_j . Generalmente se pueden encontrar tres tipos de neuronas.

1. Unidades de entrada: Reciben estímulos externos (información) relacionadas con el aparato sensorial y constituyen la capa de entrada.
2. Unidades ocultas: Procesan la información de entrada y generan un tipo de representación interna de la información, constituyendo lo que se conoce como capa oculta o intermedia.
3. Unidades de salida: Dan la respuesta del sistema y constituyen la capa de salida.

Entre las neuronas que forman una RNA existe un conjunto de conexiones que unen unas con otras. Cada unidad transmite señales a aquellas que están conectadas con su salida. Asociada con la unidad U_i existe una función de salida $f_i(a_i(t))$ que transforma el estado actual de activación $a_i(t)$ en una señal de salida $y_i(t)$; es decir :

$$y_i(t) = f_i(a_i(t)) \quad (\text{Ec. 16})$$

A menudo f_i es de tipo sigmoideal y suele ser la misma para todas las unidades, pero puede utilizarse también las funciones lineal, mixta y escalón.

En la figura 11 se muestra un modelo típico de una RNA.

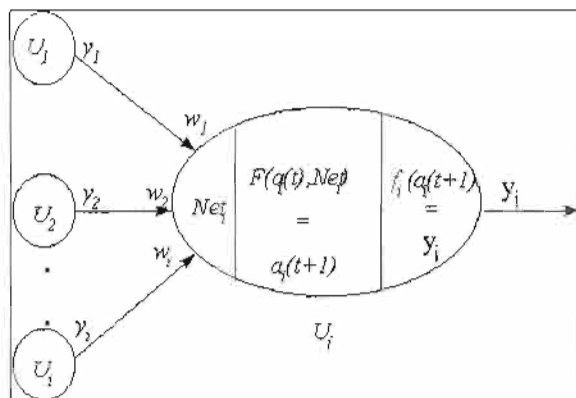


Fig. 11 Modelo típico de una RNA.

La RNA Backpropagation.

En 1986, Rumelhart, Hinton y Williams formalizaron un método conocido como backpropagation (Fig. 12) (propagación del error hacia atrás) el cual está basado en la generalización de la regla delta y a pesar de sus propias limitaciones, ha ampliado de forma considerable el rango de aplicaciones de las RNA's.

El algoritmo backpropagation es una regla de aprendizaje que se puede aplicar en modelos de RNA's con más de dos capas de neuronas. Una característica importante de este algoritmo es la representación interna del conocimiento que es capaz de organizar en la capa oculta.

De forma simplificada el funcionamiento de una RNA backpropagation consiste en un aprendizaje de un conjunto predefinido de pares de entradas-salidas dados como ejemplos, empleando un ciclo de propagación-adaptación de dos fases.

Primero se aplica un patrón de entrada como estímulo para la capa de entrada, después se va propagando a través de todas las capas superiores hasta generar una salida, se compara el resultado obtenido en la capa de salida con la salida que se desea obtener y se calcula un valor de error para cada neurona de salida.

A continuación estos errores se transmiten hacia atrás partiendo de la capa de salida hacia todas las neuronas de la capa intermedia que contribuyen directamente a la salida, recibiendo el porcentaje de error aproximado a la participación de la neurona intermedia en la salida original.

Este proceso se repite capa por capa,

hasta que todas las neuronas de la RNA hayan recibido un error que describa su aportación relativa al error total. Basándose en el valor del error recibido, se reajustan los pesos de conexión de cada neurona de manera que en la siguiente vez que se presente el mismo patrón la salida está más cercana a la deseada; es decir, el error disminuya.

La importancia de la red backpropagation consiste en su capacidad de autoadaptar los pesos de las neuronas de las capas intermedias para aprender la relación que existe entre un conjunto de patrones dados como ejemplo y sus salidas correspondientes.

Esta característica se conoce como generalización y se define como la facilidad de dar salidas satisfactorias a entradas que la RNA no ha visto en su fase de entrenamiento. [29]

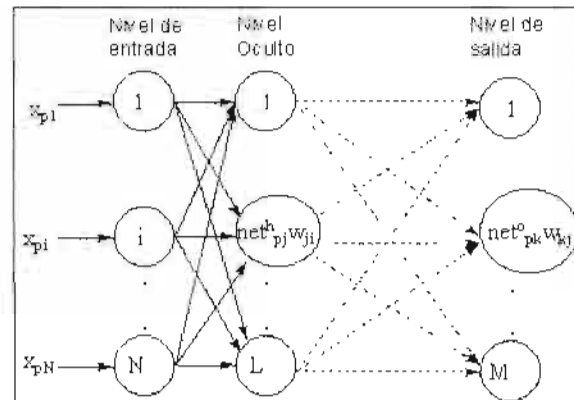


Fig. 12 Modelo de arquitectura de una RNA Back-propagation

DISEÑO DE UNA RED NEURONAL ARTIFICIAL PARA LA ESTIMACION DE PRECIOS DE UN TITULO OPCIONAL.

1. Definición del problema

El modelo de Black & Scholes supone que el valor de mercado de un activo financiero sigue el Movimiento geométrico browniano en tiempo continuo, según la Ec. 2.18. El Movimiento geométrico browniano es un proceso de Ito en el que S es la variable en cuestión.

El proceso de Ito es una generalización del proceso de Wiener. Un proceso de Wiener es un proceso estocástico en el que la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria es una distribución normal.

Dado que una variable lognormal puede asumir sólo valores positivos, se aplica el proceso de Ito a una variable lognormal para representar los precios de los activos financieros. La distribución de probabilidad de las cotizaciones futuras de un activo financiero es logaritmico-normal.

La tasa de rendimiento es normalmente distribuida y la varianza del rendimiento del activo financiero es constante por unidad de tiempo.

De acuerdo al teorema del límite central si tenemos una sucesión de variables independientes $x_1, x_2, x_3, \dots, X_n$ con la misma distribución de probabilidad, la misma media y la misma varianza, entonces la sucesión de variables aleatorias $z_1, z_2, z_3, \dots, Z_n$ definida como:

$$Z_n = \frac{Y_n - \mu_X}{\sigma_X \sqrt{n}} \quad (\text{Ec. 17})$$

$$Y_n = \sum_{i=1}^n x_i \quad (\text{Ec. 18})$$

tiende a la distribución normal estándar cuando n tiende a infinito.

Aplicando el teorema del límite central a una variable que sigue un proceso de Wiener nos encontramos que: Toda variable definida como la suma de n variables normales independientes Z_i , es a su vez una variable normal cuya varianza es la suma de las varianzas de todas las Z_i y cuya media es la suma de las medias de todas las Z_i . Lo anterior implica que la distribución de precios diarios es normal, y que la tasa de rendimiento son sumas de muchos cambios de precios intradía, como se muestra en la Fig. 13.

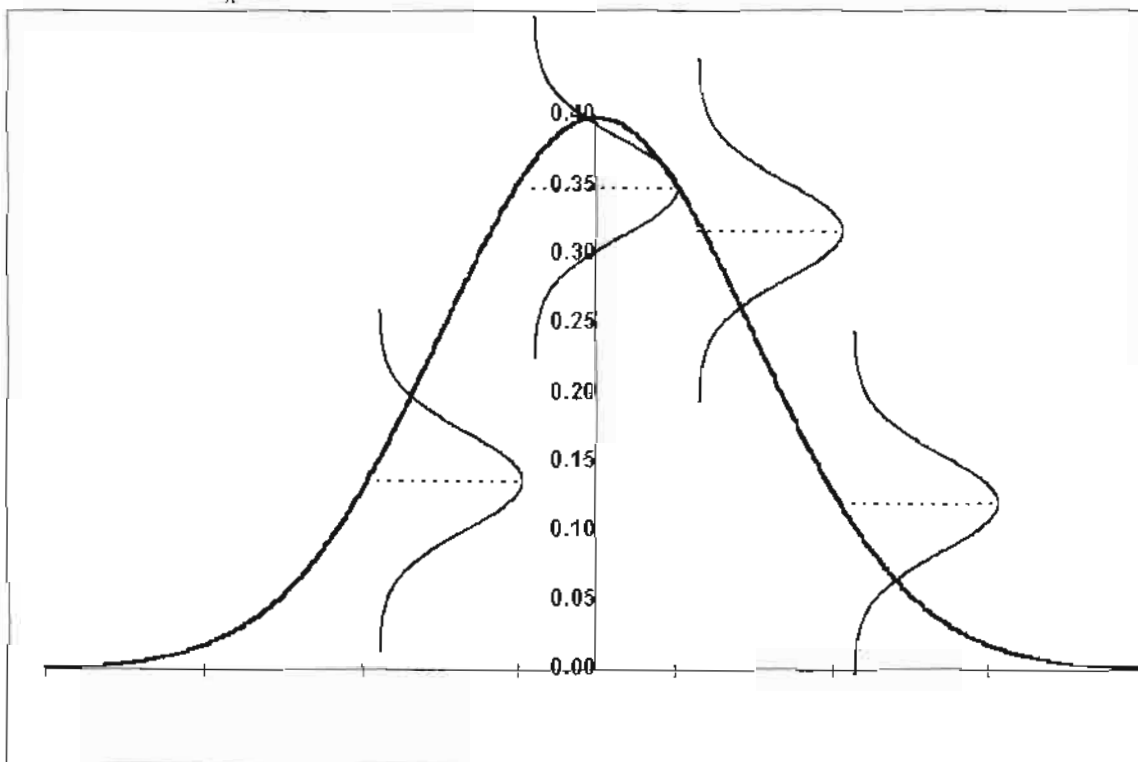


Fig. 13. Aplicación del teorema del límite central a una variable que sigue un proceso de Wiener

Las condiciones del teorema del límite central pueden no ser cumplidas debido a:

- a) Los cambios de precios pueden no tener una varianza finita [9], [10].
- b) El consenso es que las distribuciones son

extremo esbelias y por lo tanto no normales, sin embargo, distribuciones estables con varianza infinita no ajustan los datos tan bien como mezclas de normales con diferentes varianzas.

- c) Existe evidencia de que las varianzas



cambian sobre el tiempo [13], [14], [15], [16].

El modelo de B&S está limitado a que la dinámica del activo subyacente siga un proceso de Wiener (distribución normal) y esto puede no suceder, por lo que es necesario implementar un modelo que tenga la habilidad para capturar la dinámica del activo subyacente con un mínimo de supuestos.

a) Selección de variables de entrada

VARIABLE	DESCRIPCION
T-t =	Tiempo que falta hasta el vencimiento de la opción.
S/X =	Cociente de S entre X
S/X(t-1) =	Cociente de S entre X en (t-1)
S/X(t-2) =	Cociente de S entre X en (t-2)
C(t-1) =	Precio del Título Opcional en t-1
C(t-2) =	Precio del Título Opcional en t-2
AB* =	Valor correspondiente al término (a-b)/(a+b)

* = Este término se aplica a las 6 variables de entrada y la variable de salida, por lo que en total se tienen 13 variables de entrada.

b) Variable de salida

C	Precio del Título Opcional
---	----------------------------

2. Recolección de información

Para la recolección de información se realizó un análisis sobre la distribución de frecuencias de los activos financieros utilizados como valor subyacente. Los activos financieros más utilizados como valor subyacente fueron CEMEX BCP, TELMEX L y el IPC, los cuales ocupan respectivamente el 18.5%, 16.8%, 16.8%.

3. Preprocesamiento de información

a. Calcular Diferencias

$$f(X_t)_t = X_t - X_{t-1} \quad (\text{Ec. 19})$$

b. Normalizar Rango

$$f(X_t)_t = \frac{(X_t - \mu_1)}{\sigma} \quad (\text{Ec. 20})$$

c. Aplicar función sigmoide

$$f(X_t)_t = \frac{1}{(1 + e^{-x})} \quad (\text{Ec. 21})$$

d. Aplicar término (a-b)/(a+b)

$$f(X_t)_t = \frac{(X_t - X_{t-1})}{(X_t + X_{t-1})} \quad (\text{Ec. 22})$$

e. Concatenar resultados de d y c

4. Selección de muestras de entrenamiento y prueba

2/3 del total -> Muestra de Entrenamiento
1/3 del total -> Muestra de Prueba

5. Definición de topología.

Nivel de Nodo	
Tipo de entrada aceptada	Decimal
Función de Transferencia	Sigmoide
Nivel de Red	
Número de nodos en Capa de Entrada	13
Número de capas ocultas	3
Número de nodos en cada capa oculta	13
Número de nodos en la capa de salida	1
Nivel de Entrenamiento	
Algoritmo de Aprendizaje	Regla Delta Generalizada
Parámetros de aprendizaje	Beta = 0.9 Alfa = 0 N.F. = 0 Error = 0.000001

Como se puede observar en la Fig. 14 la serie (RNA) estimada por la red casi está montada sobre la serie (C) que representa los precios de cierre, lo cual nos indica que la RNA pudo reconocer la función de (C) con un alto grado de aproximación, que se confirma en la Fig. 15 en la que la serie estimada por la RNA sigue a la serie (Real) con mucho mayor precisión que la serie B&S.

En la tabla 1 se puede observar cómo el coeficiente correlación, MAPE y promedio de los cuadrados de los residuos aplicados a la serie Real vs. RNA tienen un mejor desempeño que los indicadores aplicados a la serie Real vs. B&S.

6. Fase de Entrenamiento (RNA que SI aprendió)

ESTADO	W_Emis	W_Serie	TW	Liq	Emisor	Fecha_Emis	Fecha_Exp	X	C	VS_Emis	VS_Serie
APRENDIO	CMX509A	DC031	C	D	OBSA	14/02/95	05/09/95	19.88	4.18	CEMEX	B

	Inicio	Fin
Entrena	21/02/95	17/07/95
Prueba	18/07/95	4/09/95
Iteraciones	10034	
Beta	0.9	
Alfa	0	
N F.	0	
Error	1E-07	

	T	S/X	S/X (t-1)	S/X (t-2)	C(t-1)	C(t-2)	C
T	1.000						
S/X	-0.935	1.000					
S/X (t-1)	-0.930	0.984	1.000				
S/X (t-2)	-0.920	0.964	0.983	1.000			
C(t-1)	-0.867	0.958	0.978	0.963	1.000		
C(t-2)	-0.854	0.927	0.955	0.97	0.968	1.000	
C	-0.875	0.978	0.964	0.944	0.971	0.936	1.000

7. Fase de Prueba. (RNA que SI aprendió)

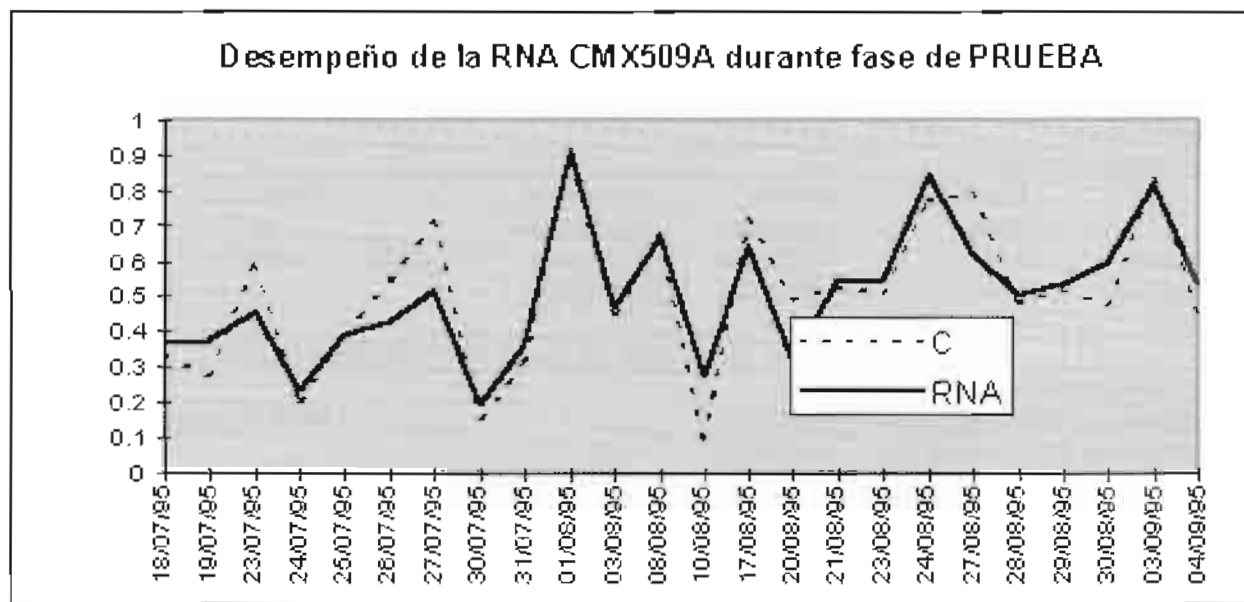


Fig. 14 Desempeño de una RNA que SI aprendió

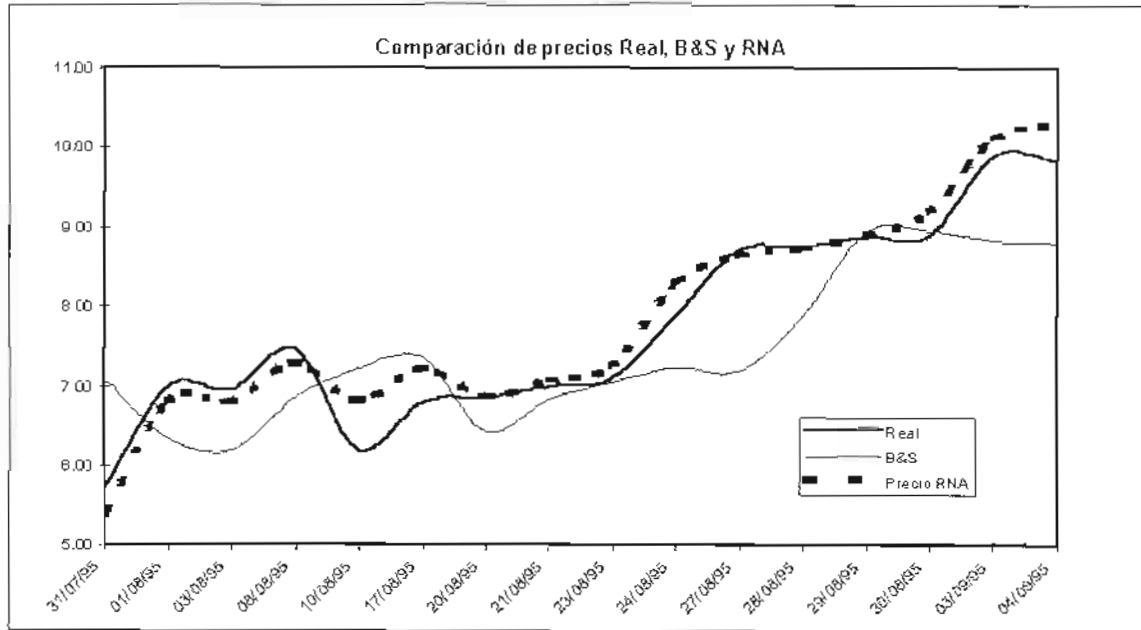


Fig 15 Comparación de precios (RNA que SI aprendió)

8 Validación del desempeño de la RNA. (RNA que SI aprendió)

Resumen estadístico precio real VS precio B&S CMX509A DC031					
ESTADÍSTICAS DE REGRESION					
Coefficiente de correlación múltiple	0.789235468			MAPE	0.071164738
Coefficiente de determinación R ²	0.622892624				
R ² ajustado	0.595956383				
Error típico	0.806134591				
Observaciones	16				
ANÁLISIS DE VARIANZA					
	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Promedio de los cuadrados	F	Valor crítico de F
Regresión	1	15.02765829	15.02765829	23.12470479	0.000277923
Residuos	14	9.097941706	0.649852979		
Total	15	24.1256			
Resumen Estadístico Precio Real VS Precio RNA CMX509A DC031					
ESTADÍSTICAS DE REGRESION					
Coefficiente de correlación múltiple	0.980971047			MAPE	0.025348987
Coefficiente de determinación R ²	0.962304196				
R ² ajustado	0.959611638				
Error típico	0.254871662				
Observaciones	16				
ANÁLISIS DE VARIANZA					
	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Promedio de los cuadrados	F	Valor crítico de F
Regresión	1	23.21616611	23.21616611	357.3941192	2.3039E-11
Residuos	14	0.909433894	0.064959564		
Total	15	24.1256			

Tabla 1 Estadísticas de RNA que (SI aprendió)

En la Fig. 16 se puede observar que la serie (RNA) no sigue un comportamiento similar a la serie (C), y la Fig. 17 confirma el no aprendizaje de la RNA.

En la tabla 2 se puede observar que aun cuando los indicadores favorecen al análisis Real vs RNA estos no son significativos.

9 Fase de Entrenamiento (RNA que NO aprendió)

ESTADO	W_Emis	W_Serie	TW	Liq	Emisor	Fecha_Emis	Fecha_Exp	X	C	VS_Emis	VS_Serie
NO APRENDIO	CMX508A	DC024	C	D	GBM	17/08/94	16/08/95	30.2	6.65	CEMEX	B

	Inicio	Fin	T	S/X	S/X (t-1)	S/X (t-2)	C(t-1)	C(t-2)	C
Entrena	26/08/94	2/05/95	1.000						
Prueba	9/05/95	4/08/95	0.594	1.000					
Iteraciones	100000		0.610	0.980	1.000				
Beta	0.9		0.626	0.961	0.980	1.000			
Alfa	0		0.910	0.834	0.850	0.850	1.000		
N.F.	0		0.911	0.824	0.841	0.857	0.988	1.000	
Error	1E-07		0.909	0.844	0.844	0.843	0.988	0.977	1.000

10 Fase de Prueba. (RNA que NO aprendió)

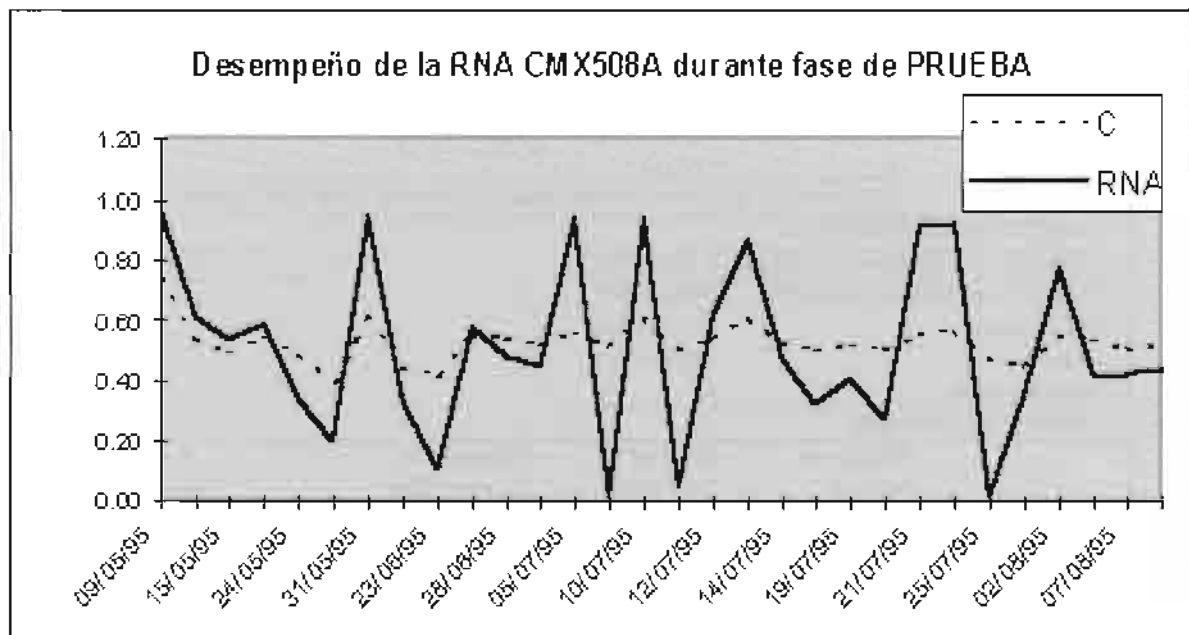


Fig. 16 Desempeño de una RNA que NO aprendió

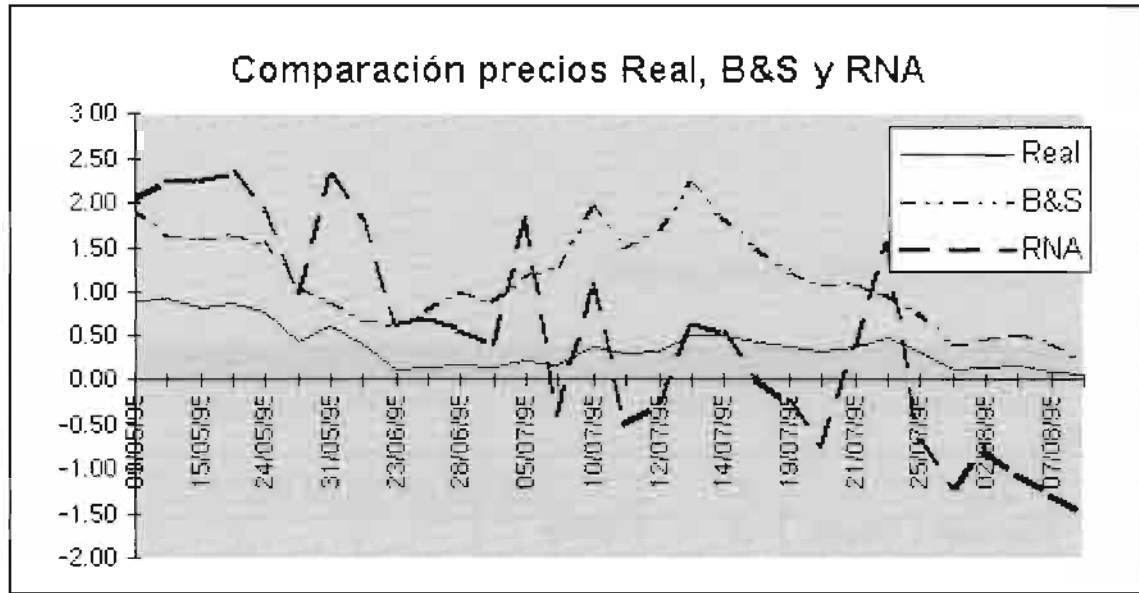


Fig. 17 Comparación de precios (RNA que NO aprendió)

11 Validación del desempeño de la RNA. (RNA que NO aprendió)

Resumen estadístico precio real VS precio B&S CMX508A DC024					
ESTADISTICAS DE REGRESION					
Coeficiente de correlación múltiple	0.680665039			MAPE	2.963409901
Coeficiente de determinación R ²	0.463304896				
R ² ajustado	0.444137213				
Error típico	0.189997051				
Observaciones	30				
ANÁLISIS DE VARIANZA					
	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Promedio de los cuadrados	F	Valor crítico de F
Regresión	1	0.872551376	0.872551376	24.171149	3.48547E-05
Residuos	28	1.010768624	0.036098879		
Total	29	1.88332			
Resumen Estadístico Precio Real VS Precio RNA CMX509A DC024					
ESTADISTICAS DE REGRESION					
Coeficiente de correlación múltiple	0.767039768			MAPE	4.799279636
Coeficiente de determinación R ²	0.588350006				
R ² ajustado	0.57364822				
Error típico	0.166397616				
Observaciones	30				
ANÁLISIS DE VARIANZA					
	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Promedio de los cuadrados	F	Valor crítico de F
Regresión	1	1.108051333	1.108051333	40.018949	7.64591E-07
Residuos	28	0.775268667	0.027688167		
Total	29	1.88332			

Tabla 2 Estadísticas de RNA que NO aprendió

Por lo anterior se concluye que el empleo de RNA's para la estimación de precios de cierre de los TO's permite obtener mejores estimaciones que el modelo de B&S para el caso de un TO de compra ITM, no siendo así para el caso ATM.

12. Extracción de reglas

Será en una segunda fase de este proyecto en donde se profundizará en el tema de extracción de reglas, ya que se tiene proyectado la integración de un sistema experto con la RNA en donde la RNA encuentre las reglas del sistema experto.

13. Implantación del modelo

El tiempo de cómputo de la RNA fue mucho mayor en comparación al cálculo realizado con el modelo de B&S, sin embargo, el tiempo y el costo de una RNA será menor conforme la RNA esté mejor entrenada y se podrán obtener estimaciones con mayor precisión en comparación a las estimaciones obtenidas con el modelo de B&S, lo cual se verá reflejado en las utilidades de los portafolios de inversión que contengan TO's.

CONCLUSIONES

1. El empleo de RNA's para la estimación de precios de cierre de los TO's permite obtener mejores estimaciones que el modelo de B&S para el caso de un TO de compra ITM, no siendo así para el caso ATM.

2. Es posible mejorar el desempeño de la RNA para los casos ATM y OTM diseñando nuevos modelos con otras:

- a) Emisiones de TO's
- b) Variables de entrada
- c) Técnicas de preprocesamiento de información
- d) Estrategias de entrenamiento
- e) Topologías
- f) Algoritmos de aprendizaje

3. El desempeño mostrado por la RNA para la estimación correcta de precios de cierre permite sugerir el desarrollo de una interfaz que alimente a la RNA de precios del activo subyacente en tiempo real [30], con el objeto de obtener indicadores de compra o venta durante la operación del mercado.

4. Las capacidades de aprendizaje y adaptabilidad a cambios de los sistemas cibernéticos, permiten sugerir a las RNA's como una herramienta para modelar la volatilidad en el MMPD.

5. Los modelos de valuación de instrumentos financieros juegan un papel determinante en la formación de precios de activos financieros, los cuales a su vez si reflejan toda la información relevante para la formación de expectativas, determinan la eficiencia o ineficiencia del mercado. Por lo anterior es posible afirmar que el empleo de herramientas cibernéticas para estimación de precios (cuya potencialidad radica en la extracción de información) contribuye a la eficiencia de un mercado. [31]

6. Dado que los productos derivados contribuyen a la disminución de la volatilidad de los activos subyacentes, es necesario contar con un método de valuación de los TO's que capture la dinámica del activo subyacente (y no la suponga) para de esta forma contribuir a la eficiencia del mercado mexicano de los activos subyacentes, la cual según el estudio realizado por Pizaña [32] en 1993, es ineficiente.

7. Es de gran importancia que los inversionistas mexicanos conozcan y utilicen herramientas cibernéticas, no sólo por el hecho de contar con una ventaja competitiva regional, sino también por el hecho de que el proceso de globalización financiera exige el dominio de innovaciones tecnológicas en materia de herramientas de análisis de la información.

8. Atendiendo al comentario final [33] "Las instituciones de enseñanza superior deben jugar un papel central en los procesos de evaluación, selección e implementación de nuevas tecnologías", este trabajo representa un esfuerzo en la aplicación de nuevas técnicas de análisis de instrumentos financieros listados en el Mercado de Valores Mexicano.

REFERENCIAS

1. Edgar E. Peters (1992) *"Chaos and Order in the Capital Markets"*, John Wiley & Sons, Inc. USA.
2. Andrew Lo (1993) "On the path to price prediction", *Entrevista Wall Street & Technology*, Junio.



3. Hamid Ahmadi (1990) "Testability of the Arbitrage Pricing Theory by Neural Network", *Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks*, pp. 11385-1393, San Diego CA.
4. Mandelbrot, B (1964) "The variation of Certain Speculative Prices". In: P. Cootner (ed). *The Random Character of Stock Prices* Cambridge, MA MIT Press.
5. Mandelbrot, B (1971) . "When can Price be arbitrated efficiently ? A Limit to the Validity of the Random Walk and Martingale Models", *Review of Economics and Statistics* 53.
6. Mandelbrot, B. (1961) "Stable Paretian Random Functions and the multiplicative variation of Income", *Econometrica* 29.
7. John Hull & Alan White (1987) "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities", *The Journal of Finance*, Vol.42 No.2, pp.281-300, June.
8. Herb Johnson & David Shanno (1987) "Option Pricing when the variance is Changing", *Journal of Financial and Quantitative Analysis* , Vol 22 No.2, pp 143-151, June
9. Mandelbrot, B. (1963) "The Variation of Certain Speculative Prices", *Journal of Business*, 36 Oct, pp.394-419.
10. Fama, E. F. (1965) "The Behavior of Stock Market Prices", *Journal of Business*, 38 Jan, pp.34-105.
11. Mandelbrot, B. & H (1967). Taylor "On the Distribution of stock price Differences", *Operation Research*, 15 (Nov/Dec.) pp.1057-1062 .
12. Clark, P.K. (1973) "A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative prices", *Econometrica*, 41 (Jan,) 135-155.
13. Black F. (1975) "Forecasting variance of stock prices for options trading and other purposes", *Seminar on the Analysis of security prices*, Univ. of Chicago (Nov).
14. Blatberg, R.C. & N.J. Gonedes (1974) "A comparison of the Stable and Student Distributions as Statistical models for stock prices", *Journal of Business*, 47 (April), pp.244-280.
15. Christie A. A. (1982) "The Stochastic behavior of common stock variances: Value, leverage and interest rate effects", *Journal of Financial Economics*. 10 (Dec), pp.407-432.
16. Rosenberg, B. (1972) "The behavior of random variables with nonstationary variance and the distribution of security prices", *Working Paper*, Univ. CA at Berkeley.
17. Felsen J. (1975) "*Cybernetic Approach to stock Market Analysis*", CDS Publishing Company, USA.
18. Kean J. (1992) "Chaos Theory and Neural Network Analysis", *Technical Analysis of Stocks and Commodities*, June.
19. David Mayer & Raul Anibal Feliz (1992) "*Non-linear dynamics in the stock Exchange*", División de Economía, CIDE, MEXICO.
20. Herbert A. Simon (1996) "*The Sciences of the Artificial*", The MIT Press Cambridge, Massachusetts USA.
21. Malliaris M.E. & L. Salchenberger (1993) "Beating the Best: A Neural Network Challenges the Black & Scholes Formula", *Proc. of the Ninth Conference on Artificial Intelligence for Applications*. Los Alamitos CA. IEEE Computer Society Press, pp.445-449
22. James M. Hutchinson, Andrew W. LO, & Tomaso Poggio (1994) " A Nonparametric Approach to Pricing and Hedging Derivative Securities Via Learning Networks", *The Journal of Finance* Vol.49 No.3. July, pp.851-888.
23. David L. Kelly (1994) "*Valuing and hedging american put options using Neural Networks*", Carnie Mellon University and University of California Santa Barbara CA.
24. Malliaris M.E. and L. Salchenberger (1994) "Neural Networks for Predicting Options Volatility". *World Congress on Neural Networks*, San Diego, CA, June 5-9, pp. II 290-295
25. Bolsa Mexicana de Valores (1995) "*Que son y cómo operan los Títulos Opcionales en México*", Limusa Noriega Editores, México.

26. Bolsa Mexicana de Valores (1994-1995) "Boletín bursátil : Sección de Análisis y Valuación de instrumentos del mercado de capitales", *Publicación de la BMV*, Números del 17 de Agosto al 4 de Septiembre.
27. Prosper Lamothe (1993) "*Opciones Financieras*", McGraww-Hill. España
28. John Hull (1989) "*Options, Futures and other derivative securities*", Prentice-Hall International, Inc. USA
29. José R. Hillera & Victor J. Martínez, "*Redes Neuronales Artificiales: Fundamentos, modelos y aplicaciones*", México. Addison-Wesley Iberoamericana.
30. Enríquez Osorio G & Pérez Elizalde G. (1995), "Esquema General de Construcción y Mantenimiento de un Portafolio de Cobertura Delta-Hedge y su Implementación en un Sistema de Tiempo Real", *Inversión y Finanzas*. pp. 84-96.
31. Pérez Elizalde Guillermo (1998). "Las Redes Neuronales Artificiales: Una Herramienta Cibernética para la estimación de precios en el Mercado Mexicano de Productos Derivados", *Tesis para obtener el grado de Ingeniero en Cibernética*. Escuela de Ingeniería. Universidad La Salle México.
32. Pizaña Treviño Karla M. (1995) "El Mercado accionario: Pruebas de eficiencia y estacionalidad", *Ejecutivos de Finanzas*, Abril pp. 65-80
33. González-Aréchiga Bernardo (1995), "Cooperación Educación Superior-Sector Privado para el Desarrollo: El caso del sector Bursátil", *Conferencia Binacional sobre la Relevancia de la Educación Superior en el Desarrollo* ANUIES-ALO , 2 de Febrero , México D.F.