

Un Método de Perturbaciones Paramétricas para Controlar el Circuito de Chua

Hugo G. González-Hernández

Laboratorio de Investigación y Desarrollo de Tecnología Avanzada (LIDETEA)

Coordinación General de Investigación, Universidad La Salle, México.

<hgonz@ci.ulsal.mx, caos@ci.ulsal.mx>

Marcos Montiel-Castellanos

Technische Universität Dresden, Institute für Grundlagen der Elektrotechnik Dresden, Alemania.

<marcos@iee.et.tu-dresden.de>

RESUMEN

El control de Caos ha sido un área de investigación en expansión en la última década. Se han desarrollado una gran cantidad de teorías y técnicas para controlar o suprimir Caos. Algunas de las técnicas más populares son los llamados métodos de perturbación paramétrica, los cuales han sido derivados del método OGY original (1). Estas técnicas utilizan un parámetro accesible del sistema para ser variado, a fin de estabilizar alguna de las Órbitas Periódicas Inestables (OPI's) empotradas en el atractor del sistema. En este trabajo se reporta la aplicación de una extensión del enfoque de OGY para controlar el circuito de Chua. Esta extensión consiste en utilizar el Mapa de Primer Retorno en lugar del Mapa de Poincaré para describir la dinámica del sistema en la vecindad de una Órbita Periódica Inestable.

Palabras clave: Caos, control, estabilización.

ABSTRACT

Chaos control has been an expanding research area over the last decade, therefore a great amount of techniques have been developed for controlling or suppressing chaos. Some of the most popular techniques are the so-called parametric perturbation methods, which are derived from the original OGY method (1). These techniques use an accessible system's parameter for being changed in order to stabilize one of the system's Unstable Periodic Orbits. In this paper we report the application of an extension from the OGY approach to control chaos in Chua's circuit. This extension consists in using a First Return Map instead of a Poincaré Map for describing the system's dynamics in the neighborhood of an Unstable Periodic Orbit.

Keywords: chaos, control, stabilization.

INTRODUCCIÓN

En la última década ha habido una gran explosión en el campo de la dinámica no lineal, especialmente concerniente al control de Caos. Esto es debido a la consideración de que las oscilaciones caóticas son un tipo peculiar de comportamiento irregular e impredecible, comúnmente considerado indeseable. Por esto, en la mayoría de los casos se trata de controlar-

lo o evitarlo lo más posible.

A pesar de los esfuerzos por parte de los investigadores en el área para controlar Caos, no se ha podido desarrollar una metodología "unificada" para el control de Caos. A diferencia de los problemas clásicos de control, donde la estabilización tiene un significado claro, la estabilización de Caos puede ser entendida en muchos sentidos diferentes (2). Algunos autores definen el objetivo de control como la estabilización de puntos de equilibrio, la eliminación de cuencas múltiples de atracción, y en algunos

casos, la estabilización de órbitas periódicas inestables. Esto nos lleva a diferentes enfoques de control (3) como los métodos de control de "rediseño", métodos de perturbaciones paramétricas, métodos de fuerza externa y métodos de ingeniería de control.

Los métodos de perturbaciones paramétricas son derivados del método desarrollado por E. Ott, C. Grebogi y J. A. Yorke, comúnmente conocido como OGY (1). Este método está basado en la idea de que un atractor caótico está compuesto por la cerradura de un número infinito de Órbitas Periódicas Inestables (OPI), y que el sistema se puede estabilizar con pequeñas perturbaciones de un parámetro accesible del sistema. En general, esto hace que la trayectoria de solución del sistema se vea forzada a pasar a través de la variedad estable de un punto fijo en un mapa que representa la dinámica del sistema en una dimensión menor (4)

Una de las principales características de esta técnica es que puede ser implantada a partir de una serie de tiempo proveniente de mediciones del sistema, sin necesidad de un conocimiento a priori de las ecuaciones que describen el comportamiento del mismo (5).

SISTEMAS CAÓTICOS

Considere la familia de sistemas dados por la siguiente ecuación.

$$\dot{x} = f(x, t, \beta)$$

(Ec. 1)

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el estado, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial suave, y β denota los parámetros del sistema. La solución de (Ec. 1) es una función vectorial $x = x(t)$ que describe la trayectoria en el espacio construido con sus coordenadas. Dependiendo de los valores de los parámetros, el sistema puede desplegar diferentes estados estacionarios que van desde puntos de equilibrio hasta atractores caóticos.

Definición 1 (Atractor Caótico) (6). Considere un campo vectorial autónomo C^r ($r \geq 1$) en \mathbb{R}^n

definiendo un sistema como (1) Denotando el flujo generado por (Ec. 1) como $\phi(t, x)$, y suponiendo que $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto compacto invariante bajo $\phi(t, x)$, Λ se dice caótico si:

i. Sensibilidad a condiciones iniciales. Existe un $\varepsilon > 0$ tal que, para cualquier $x \in \Lambda$ y cualquier vecindad U de x , existen $y \in U$ y $t > 0$ tales que $|\phi(t, x) - \phi(t, y)| > \varepsilon$.

ii. Transitividad topológica Para cualquier par de conjuntos abiertos $U, V \subset \Lambda$, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\phi(t, U) \cap V \neq \emptyset$

CONTROL POR MÉTODOS DE PERTURBACIONES PARAMÉTRICAS

En 1990, Ott, Grebogi y Yorke (1) desarrollaron una técnica general para controlar sistemas no lineales estabilizando una OPI empotrada en su atractor; esta técnica utiliza perturbaciones paramétricas dependientes del tiempo. Esta idea viene de la observación de que un atractor caótico típicamente tiene empotrado un conjunto denso de OPI's (7), (8).

Si se tiene un sistema como (1) donde β es un parámetro del sistema que puede ser sujeto de un ajuste externo en un rango pequeño, $\beta^* - \Delta\beta_{\max} < \beta < \beta^* + \Delta\beta_{\max}$, con $\Delta\beta_{\max}$ como la perturbación máxima permisible, se puede suponer que para $\beta = \beta^*$ el sistema se comporta de forma caótica.

Si ξ representa el vector de coordenadas del Mapa de Poincaré (superficie de sección), entonces:

$$\xi_{n+1} = P(\xi_n, \beta_n)$$

(Ec. 2)

con $\beta_n = \beta^* + \Delta\beta_n$, $|\Delta\beta_n| \leq \Delta\beta_{\max}$. Se pueden determinar muchas OPI's del atractor en este mapa y se puede escoger una de ellas.

Sea $\xi_{F^*} = P(\xi_{F^*}, \beta^*)$ el punto fijo inestable seleccionado del mapa P , el cual corresponde a la órbita deseada. Se pueden observar las iteraciones del mapa cerca de la órbita deseada y obtener las propiedades locales para esta órbita

periódica. A fin de realizar esto, es necesario ajustar las iteraciones del mapa a una aproximación lineal. Esta aproximación en la vecindad de ξ_F^* y β^* está dada por

$$\Delta \xi_{n+1} \approx L \Delta \xi_n + w \Delta \beta_n \quad (\text{Ec. 3})$$

donde $\Delta \xi_n = \xi_n - \xi_F^*$, $\Delta \beta_n = \beta_n - \beta^*$, $L = (\partial / \partial \xi_n) P(\xi_F^*, \beta^*)$, y la derivada parcial de la órbita es $w = (\partial / \partial \beta_n) P(\xi_F^*, \beta^*)$. Los valores propios estable λ_s e inestable λ_u que satisfacen $|\lambda_s| < 1 < |\lambda_u|$ pueden ser extraídos a partir del mapa local aproximado. Las variedades estable e inestable denotadas por M_s y M_u , son definidas como aquellas trayectorias que convergen asintóticamente a un punto fijo en tiempo progresivo y regresivo respectivamente, en otras palabras: M_s para $t \rightarrow +\infty$ y M_u para $t \rightarrow -\infty$. Las direcciones de las variedades estable e inestable en el punto fijo están dadas por los vectores propios e_s y e_u correspondientes a λ_s y λ_u respectivamente. Si f_s y f_u son los vectores contravariantes definidos por $f_s \cdot e_s = f_u \cdot e_u = 1$ y $f_s \cdot e_u = f_u \cdot e_s = 0$, podemos escribir $L = \lambda_u e_u f_u^T + \lambda_s e_s f_s^T$.

Suponiendo que ξ_n ha estado suficientemente cerca de ξ_F tal que la Ec. 3 se cumple, para que la siguiente iteración ξ_{n+1} caiga en la variedad local estable ξ_F^* , el parámetro $\beta_n = \Delta \beta_n + \beta^*$, tiene que ser seleccionado de tal forma que se satisfaga el requerimiento $f_u \Delta \xi_{n+1} = f_u(\xi_{n+1} - \xi_F^*) = 0$. Tomando el producto interno de la ecuación (4) con f_u se tiene:

$$\Delta \beta_n = -\lambda_u \frac{f_u \cdot \Delta \xi_n}{f_u \cdot w} \quad (\text{Ec. 4})$$

donde se supone que $f_u \cdot w \neq 0$. Es importante mencionar que el resultado obtenido de $\Delta \beta_n$ es utilizado para perturbar el parámetro β sólo si $\beta_n \leq \beta_{\max}$, donde $\Delta \beta_n > \Delta \beta_{\max}$. Sin embargo, la perturbación debe ajustarse a cero. Además, cuando ξ_{n+1} cae en la variedad estable ξ_F^* la perturbación $\Delta \beta_n$ puede ser ajustada a cero. La órbita para los instantes de tiempo subsecuentes ($\xi_{n+2}, \xi_{n+3}, \dots$) debe aproximarse a ξ_F^* en una razón geométrica λ_s .

Sin embargo, debido a posibles errores e imprecisiones en los cálculos anteriores, las iteraciones subsecuentes pueden caer fuera de la variedad estable. A fin de evitar esto, la nueva $\Delta \beta_n$ tendrá que ser calculada para cada iteración para asegurar que la subsecuente ξ_n se aproxime a ξ_F^* .

Podemos dividir los métodos de perturbaciones paramétricas en los siguientes pasos (9):

1. Identificación de Órbitas Periódicas Inestables empotradas en el atractor caótico y selección de una de ellas (puntos fijos inestables en la hipersuperficie de sección).
2. Caracterización del desplazamiento debido a pequeños cambios a estímulos externos (introduciendo pequeñas perturbaciones al parámetro accesible del sistema).
3. Caracterización de la dinámica local del punto fijo.
4. Diseño de la ley de control (cambio correcto en el parámetro tal que el estado sea forzado a caer dentro de la variedad estable de la órbita periódica).

Movimientos Periódicos Inestables y Puntos Fijos

En esta sección se describe la metodología empleada para encontrar OPI's a partir de series de tiempo.

A diferencia de la técnica OGY, en lugar de utilizar un Mapa de Poincaré como la superficie de sección para encontrar las OPI (7), se utiliza una herramienta conocida como Mapa de Primer Retorno (MPR). El MPR se obtiene a partir de los máximos locales de una señal caótica y sus retrasos en tiempo para construir un vector de coordenadas retrasadas análogo al utilizado para la reconstrucción del atractor (2), (10).

Para diseñar el controlador sólo necesitamos una serie de tiempo de cualquier variable del sistema, a fin de formar la serie de tiempo $\xi(n)$, y el MPR puede ser expresado como:

$$\xi_n = P(\xi_{n+1}, \beta) \quad (\text{Ec. 5})$$

donde P es una función no lineal desconocida y β es el parámetro a perturbar.

Cabe mencionar que el parámetro β determina la localización del punto fijo ξ_F dado por:

$$\xi_n = \xi_{n-1} = \xi_F \quad (\text{Ec. 6})$$

Una vez obtenido el MPR, se busca la ubicación del punto fijo inestable que corresponde a la OPI. Este punto se obtiene encontrando la intersección de la función P del MPR con la línea recta descrita por (Ec. 6).

Caracterización del Desplazamiento ante Pequeños Estímulos Externos

Como se ha mencionado, este método de control consiste en producir pequeñas perturbaciones al sistema mediante la variación de parámetro accesible del mismo. Estas perturbaciones producen un cambio en la ubicación del punto fijo inestable, por esto es importante conocer este cambio.

El valor del parámetro β tiene que ser ajustado en una vecindad del valor del parámetro nominal β^* entre bifurcaciones para encontrar la relación entre el parámetro β y el cambio en la ubicación del punto fijo ξ_F . Los puntos obtenidos pueden ser aproximados a una línea recta por medio de métodos mínimo cuadrados, y la pendiente m de esta recta es utilizada para crear el vector de desplazamiento g necesario para calcular el vector de ganancia de retroalimentación vector en la fórmula:

$$\Delta\beta = \frac{\lambda_u}{\lambda_u - 1} \frac{f_u^t \cdot \Delta\xi}{f_u^t \cdot g} \quad (\text{Ec. 7})$$

donde λ_u es el valor propio inestable del punto silla y f_u es el vector propio de la base contravariante en la linealización que se describe en la siguiente sección.

Caracterización de la dinámica local linealizada

El último paso antes de diseñar un controlador tipo OGY consiste en caracterizar la dinámica

alrededor del punto fijo inestable. Suponemos que este punto fijo se comporta en forma lineal dentro de una vecindad de este mismo. Para desarrollar esta identificación utilizamos también la serie de máximos locales $\xi(n)$ utilizada para crear el MPR.

Entonces, la dinámica linealizada en la vecindad del punto fijo se puede escribir:

$$\xi_n - \xi_F = M (\xi_{n-1} - \xi_F) \quad (\text{Ec. 8})$$

donde M es una matriz cuadrada. Debido a que la órbita periódica a estabilizar es inestable, el punto fijo correspondiente ξ_F en el MPR es un punto silla, luego, este tiene un valor propio inestable y uno estable asociados a él y sus correspondientes direcciones.

Para lograr el buen funcionamiento del control, es necesario que el siguiente máximo caiga sobre la dirección estable. Esto nos lleva a la siguiente condición:

$$f_u^T \cdot (\xi_{n+1} - \xi_F(\beta_n)) = 0 \quad (\text{Ec. 9})$$

Esto significa que el vector de desplazamiento desde el punto fijo al siguiente máximo no tiene componente sobre f_u , en otras palabras, cae sobre la dirección estable ($f_u \cdot e_s = 0$). Para esto, es necesario determinar los valores de λ_u y de f_u , es decir conocer la matriz M .

Utilizando la serie de tiempo $\xi(n)$ y conociendo el valor del punto fijo es posible determinar la matriz M y entonces se pueden obtener los valores de λ_u y f_u . Esto se logra parametrizando la Ec. 4 con un procedimiento de identificación con mínimos cuadrados.

Esta parametrización consiste en seleccionar una secuencia de puntos de la serie de tiempo $\xi(n)$ (al menos cuatro de ellos) en la vecindad del punto fijo inestable. Estos máximos sucesivos deben estar sobre la misma dirección, pero cayendo en sentidos opuestos alternativamente.

Una vez obtenidos los valores para la matriz M se puede calcular el vector de ganancia de retroalimentación en la fórmula 7.

APLICACIÓN AL CIRCUITO DE CHUA

El Circuito de Chua

El Circuito de Chua es un oscilador no lineal simple que exhibe una variedad de comportamiento incluyendo Caos (11). El circuito contiene tres elementos que almacenan energía (un inductor y dos capacitores), una resistencia lineal y una sola resistencia no lineal N_R . Las ecuaciones de estado para el circuito son:

$$\begin{aligned} \frac{dv_{C_1}}{dt} &= \frac{1}{C_1} [G(v_{C_2} - v_{C_1}) - f(v_{C_1})] \\ \frac{dv_{C_2}}{dt} &= \frac{1}{C_2} [G(v_{C_1} - v_{C_2}) + i_L] \\ \frac{di_L}{dt} &= -\frac{1}{L} v_{C_2} \end{aligned}$$

(Ec. 10)

donde $G = 1/R$ y $f(v_{C_1})$ es una función seccionalmente continua definida por:

$$\begin{aligned} f(v_{C_1}) &= m_0 v_{C_1} + \\ &\frac{1}{2}(m_1 - m_0) \left[|v_{C_1} + B_p| - |v_{C_1} - B_p| \right] \end{aligned}$$

(Ec. 11)

La resistencia no lineal, también conocida como Diodo de Chua, puede ser construida con componentes fáciles de conseguir, y posee una curva característica de voltaje vs. corriente ($v-i$) de tres segmentos. Las pendientes en las regiones interior y exterior son m_0 y m_1 respectivamente. $\pm B_p$ denota los puntos de ruptura.

Este sistema despliega comportamiento caótico para $C_1 = 56 \text{ nF}$, $C_2 = 5.6 \text{ nF}$, $L = 10 \text{ mH}$, $m_0 = -757.5757 \text{ } \mu\text{S}$, $m_1 = -409.0909 \text{ } \mu\text{S}$, $B_p = 1$

y $G = 560 \text{ } \mu\text{S}$. Para simplificar el diseño, se reformularon las ecuaciones del circuito obteniéndose la siguiente ecuación de estado equivalente (11):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p[-x + y - f(x)] \\ \dot{y} &= x - y + z \\ \dot{z} &= -qy \end{aligned}$$

(Ec. 12)

Donde $p = C_1/C_2 > 0$ y $q = C_2/(LG^2) > 0$ son los dos parámetros principales que controlan el comportamiento del circuito y $f(v_{C_1})$ es reformulada como $f(x)$ representada por:

$$\begin{aligned} f(x) &= m_0' x \\ &+ \frac{1}{2}(m_1' - m_0') \left[|x + B_p| - |x - B_p| \right] \end{aligned}$$

(Ec. 13)

donde $m_0' = m_0/G > 0$ y $m_1' = m_1/G < 0$.

Para tener resultados consistentes con el circuito, los parámetros seleccionados para los parámetros fueron $p = 9$, $q = 14 \text{ } 2/7$, $m_0' = -5/7$, $m_1' = -8/7$. Para estos valores se puede observar un atractor extraño conocido como la Doble Espiral.

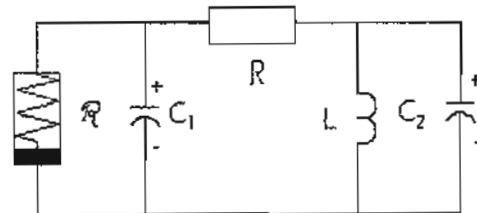


Figura 1 (a) Circuito de Chua

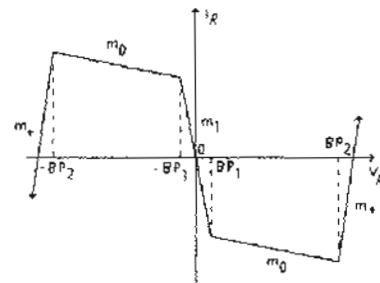


Figura 1 (b) Característica de v-i de la resistencia

Se seleccionó G como el parámetro a perturbar, y la variable medida fue z .

Movimiento periódico inestable y puntos fijos

El parámetro nominal $\beta^* = \beta = G$ fue 14 2/7. Numéricamente, se obtiene el punto de intersección calculando el centroide de masa de los puntos de P en la vecindad del punto fijo. Las coordenadas de la intersección proveen la ubicación del punto fijo buscado $(\xi_F, \xi_F) = (2.9652, 2.9652)$.

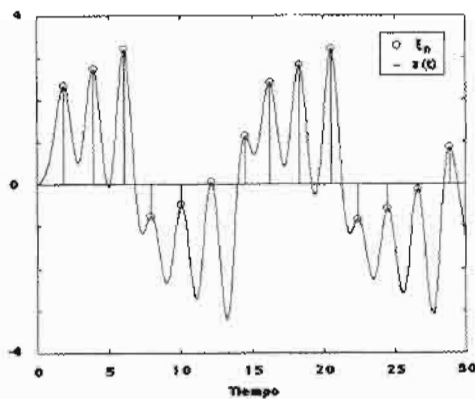


Figura 2 (a) Serie de tiempo para obtener el MPR

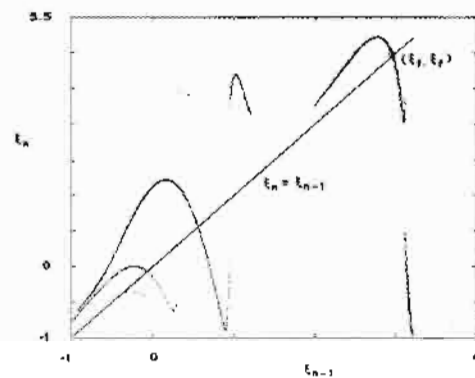


Figura 2 (b) MPR y la línea $\xi_n = \xi_{n-1}$ utilizados para obtener el punto fijo (ξ_F, ξ_F)

Caracterización del desplazamiento del punto fijo ante estímulos externos.

El valor del parámetro β fue variado entre bifurcaciones alrededor del valor nominal β^* a fin de encontrar la relación entre el valor del parámetro

tro y la ubicación del punto fijo ξ_F . Esto se realizó para el intervalo $\beta \in [13.1, 15.5]$.

En la figura 3 se pueden observar los puntos obtenidos para cada valor del parámetro β . Estos puntos fueron aproximados a una recta de forma $y = mx + b$ utilizando un algoritmo estándar de identificación por mínimos cuadrados; se obtuvieron los valores $m = 0.0988$ y $b = 1.5496$. Luego, el vector g es $g = [0.0988, 0.0988]^T$.

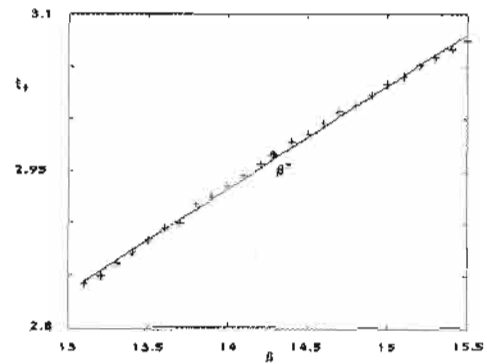


Figura 3 Puntos fijos inestables ξ_F vs. valores del parámetro β y la línea recta aproximada utilizando mínimos cuadrados.

Identificación de la dinámica local.

La parametrización consiste en seleccionar una secuencia de puntos de la serie de tiempo $\xi(n)$ (al menos 4 puntos) en la vecindad del punto fijo. Estos máximos sucesivos deben caer en la misma dirección, pero en sentidos opuestos en forma alternativa, esto se aprecia en la figura 4.

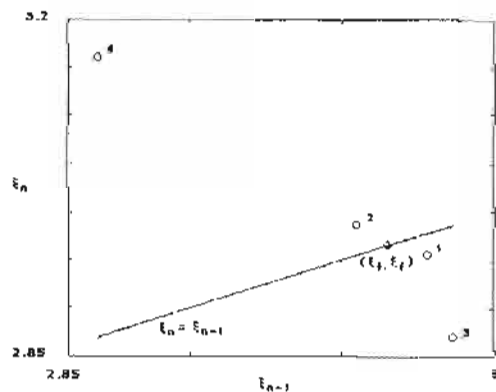


Figura 4 Puntos consecutivos del MPR utilizados para obtener la matriz M

Utilizando un procedimiento de identificación por mínimos cuadrados, obtenemos el valor de M , calculamos sus valores y vectores propios y los vectores propios de la base contravariante:

$$M = \begin{bmatrix} -0.0162 & 0.9950 \\ 1.8894 & -1.6874 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} 0.7539 \\ -2.4575 \end{bmatrix}$$

y,

$$f_u = \begin{bmatrix} 0.9613 \\ 0.3918 \end{bmatrix}$$

Con estos valores es posible calcular el vector de ganancia de retroalimentación de la fórmula OGY.

Resultados Numéricos

Este método fue aplicado utilizando perturbaciones paramétricas calculadas con la Ec. 5 para controlar una OPI empotrada en el atractor de Doble Espiral de Chua. En la figura 5 (b) se muestra el sistema controlado.

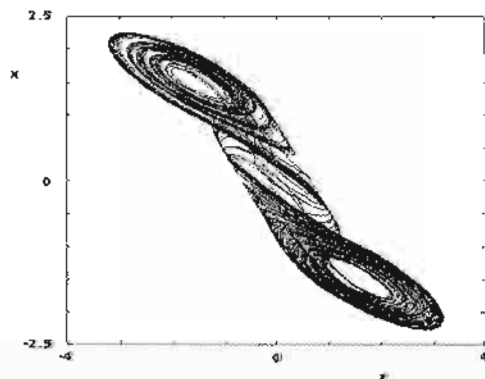


Figura 5 (a) Atractor de Doble Espiral de Chua.

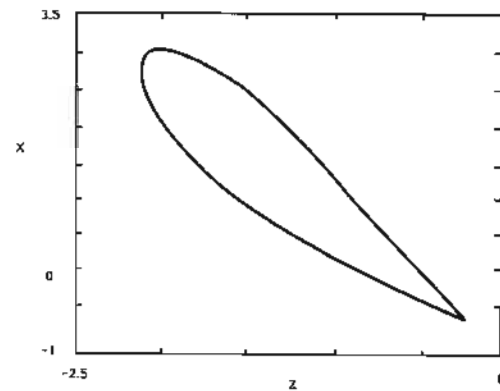


Figura 5 (b) OPI controlada

CONCLUSIONES

El método de OGY es probablemente el más popular para controlar sistemas caóticos debido a la posibilidad de implantarlo sin la necesidad de conocer la dinámica explícita del sistema, es suficiente con utilizar una serie de tiempo de mediciones experimentales. Esto no significa que sea una tarea sencilla, está compuesta de dos etapas principales: una que se desarrolla fuera de línea (el diseño del control propiamente) y la aplicación del controlador a la planta.

Se puede utilizar cualquier variable medible del sistema y cualquier parámetro accesible para aplicar las perturbaciones al sistema. Para implantaciones experimentales del control, el ruido y los errores inevitables de procesamiento de señales puede causar que el controlador no funcione de modo tan efectivo como en ausencia de éstos. En otras palabras, antes de establecerse en la respuesta deseada, el sistema puede tener transitorios caóticos cuyas longitudes pueden variar de acuerdo al momento en el que el controlador sea encendido.

El método OGY original (1) sugiere la utilización del Mapa de Poincaré, este mapa se puede formar haciendo un corte transversal del atractor en el espacio de estado. Este mapa contiene la dinámica del sistema en una dimensión menor. El problema es ubicar dónde hacer el corte para encontrar el mapa de Poincaré más adecuado; es decir, el mapa que ofrece mejores ventajas para encontrar el punto de

equilibrio y para caracterizar la dinámica. La utilización del Mapa de Primer Retorno ofrece ventajas significativas a este respecto pues permite una mejor identificación de la dinámica del sistema.

El control de sistemas caóticos es uno de los campos de investigación más promisorios dentro del estudio de sistemas dinámica no lineales y representa un gran reto en muchos campos. A partir de su desarrollo puede verse que en el futuro no solamente nos dará resultados satisfactorios a problemas actuales sino que nos proveerá de muchas ideas nuevas.

REFERENCIAS

- (1) Ott, E., C. Gregbogi, & J. A. Yorke, Controlling chaos, *Phys. Rev. Lett.* 64, p. 1196, 1990.
- (2) Abarbanel, H. D. I., *Analysis of observed chaotic data*, Springer-Verlag, 1996.
- (3) Chen, G. & X. Dong, *From chaos to order: methodologies, perspectives and applications*, World Scientific, 1998.
- (4) Grassberger, P. & I. Procaccia, *Characterization of strange attractors*, *Phys. Rev. Lett.* 50, pp. 346-349, 1993.
- (5) Nitsche, G. & U. Dressler, Controlling chaotic dynamical systems using time delay coordinates, *Physica D.* 58 p. 153, 1992.
- (6) Wiggins, S., *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, Springer-Verlag, 1990.
- (7) Auerbach, D., C. Grebogi, E. Ott, & J. A. Yorke, Controlling chaos in higher dimensions, *Phys. Rev. Lett.* 69, p. 3479, 1992.
- (8) Nayfeh, A. & B. Balachandran, *Applied nonlinear dynamics: Analytical, computational and experimental methods*, Wiley & Sons, N. Y., 1995.
- (9) Ditto, W. L., S. N. Rausseo & M. L. Spano, Experimental control of chaos, *Phys. Rev. Lett.* 65, pp. 3211-3214, 1990.
- (10) Álvarez-Gallegos, J. & H. G. González-Hemández, Analysis of the dynamics of an underactuated robot: the forced Pendubot, *Proceedings of the IEEE 36th International Conference on Decision and Control CDC'97*, San Diego, CA, pp. 10-12, diciembre, 1997.
- (11) Matsumoto, T., L. O. Chua & M. Komuro, The double scroll, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 32, pp. 798-817, 1985.