

Control adaptable indirecto usando Redes Neuronales Dinámicas

M. A. Moreno-Armendariz¹, W. Yu-Liu² & A. S. Poznyak²

¹Escuela de Ingeniería, ULSA.

<mmoreno@ci.ulsu.mx>

²CINVESTAV-IPN, Sección de Control Automático.

<{yuw,apoznyak}@ctrl.cinvestav.mx>

RESUMEN

En este trabajo se propone un nuevo tipo de control no-lineal por retroalimentación para una clase de sistemas continuos no-lineales de una entrada y una salida de la siguiente forma: Se supone que el sistema no-lineal es desconocido, así una red neuronal dinámica multicapa es usada para identificarlo. Usando un análisis tipo Lyapunov, una nueva ley de actualización estable es presentada, además la estabilidad global es probada. Finalmente, se presenta la aplicación de dicha técnica al sistema no-lineal TORA mediante simulaciones.

Palabras clave: Control por Retroalimentación, Ley de Aprendizaje, Redes Neuronales Dinámicas.

ABSTRACT

In this work, we modify the nonlinear feedback control in following direction: we assume that the nonlinear system is unknown, so the dynamic multilayer neural networks are used. By means of a Lyapunov-like analysis, a new stable learning law is proposed. The global stability of dynamic is presented. Finally the boundness of output tracking error is proposed. We illustrate the applicability of these results by a nonlinear benchmark problem: rotational-translational actuator.

Key words: Feedback Control, Learning law, Dynamic Neural Networks.

1 INTRODUCCIÓN

Indudablemente, desde que ha habido un fuerte renacimiento en la última década, las redes neuronales artificiales (RNA) están jugando cada vez un papel más importante en la Ingeniería. Por algunos años, éstas han sido una considerable promesa para aplicaciones en control no-lineal. Esta promesa está basada en su capacidad teórica de aproximar arbitrariamente bien mapeos continuos no-lineales.

En su mayor extensión, la aplicación de las redes neuronales al control automático es usualmente para aproximar el modelo de la planta y, con base en este modelo, diseñar la ley de control. La principal estructura de las redes neuronales en uso es la red neuronal

estática (RNE): el procesamiento de la información entrada - salida, por la red neuronal, da como resultado un mapeo algebraico no-lineal.

Con base en la capacidad de las RNE para aproximar cualquier función continua no-lineal, una extensión natural es aproximar el comportamiento entrada-salida de los sistemas no-lineales usando redes neuronales dinámicas (RND): su proceso de la información está descrito por ecuaciones diferenciales en tiempo continuo o por ecuaciones en diferencias en tiempo discreto. Existen resultados en este tipo de redes, pero requieren de condiciones muy restrictivas como estabilidad en lazo abierto o que el tiempo pertenezca a un conjunto cerrado.

Este trabajo busca familiarizar al lector con el nuevo campo de las redes neuronales dinámicas aplicadas al control no-lineal. Por lo cual, se presenta un análisis sistemático para la identificación, estimación de estados, y seguimiento de trayectorias para sistemas no-lineales. La herramienta principal para el análisis es el enfoque de Lyapunov.

1.1 El problema de identificación y control

En este trabajo se plantea como objetivo general, proponer una herramienta que ayude en el campo de la identificación y en el caso del control para una clase de sistemas no-lineales, como lo es el sistema no-lineal conocido como: Oscilador Traslacional con Actuador Rotacional (TORA) para el cual se propone un control adaptable directo e indirecto. Se asume que el sistema es de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f(x) + g(x)u \\ y &= x_1\end{aligned}\tag{Ec. 1}$$

Las funciones f y g son desconocidas, por lo cual se propone una RND para identificar el sistema y diseñar una ley de control: $u \in \mathfrak{R}$.

1.2 Motivación del trabajo

Debido a la complejidad y variedad de sistemas no-lineales, en este trabajo se propone utilizar las redes neuronales dinámicas para resolver el problema de identificación y de control para la clase de sistemas no-lineales (Ec. 1). Dado que éstas han demostrado su gran capacidad como aproximadores (1), resultan ser una herramienta adecuada para la solución de estos problemas.

1.3 Estructura del trabajo

La estructura del trabajo consiste en dos partes principales:

1. El identificador: Una RND es usada para reconstruir el modelo de la planta; así, la RND

se utiliza como identificador. Dado un sistema no-lineal, se tiene acceso a la medición de la salida del sistema; así la RND se usa para identificar al sistema.

2. El controlador: Una RND es usada para diseñar una ley de control que resuelva el problema de seguimiento de una trayectoria dada. Así, dado un sistema no-lineal, se usa una RND para identificar al sistema y con base al resultado de esta identificación se diseña el neuro controlador.

2 REDES NEURONALES

2.1 Introducción

La última meta de la ingeniería en control es implementar sistemas automáticos que pudieran operar con un mayor grado de independencia de las acciones del humano en un ambiente no estructurado y con incertidumbres (2). Tal sistema puede ser nombrado como autónomo o inteligente. Pudiera necesitar sólo ser presentado como una meta y podría alcanzarse este objetivo con una iteración continua con el ambiente a través de una retroalimentación acerca de su comportamiento. Podría continuar adaptándose y ejecutando tareas con una gran eficiencia en condiciones impredecibles y cambiantes. Esto sería muy útil cuando la interacción directa del humano pudiera ser peligrosa, propensa a fallas, o imposible.

Los sistemas *biológicos* son posibles esqueletos para el diseño de tales sistemas autónomos. Ellos proveen muchas pistas para el desarrollo de aprendizaje robusto (altamente estable) y algoritmos adaptables. Los sistemas biológicos procesan la información, de forma diferente a los esquemas de control convencionales; éstos no se basan en ningún modelo y son muy eficientes para tratar con incertidumbres y complejidad. No requieren del desarrollo de un modelo matemático para ejecutar tareas complejas. Ciertamente, pueden aprender a ejecutar nuevas tareas y adaptarse fácilmente a cambios en el ambiente. Si los principios fundamentales de la computación encajaron en los sistemas nerviosos, es comprensible que una generación totalmente nueva de métodos de control pudieran ser desarrollados más allá de las capacidades de las presentes técnicas basadas en un modelo matemático explícito.

Un sistema de control tiene la habilidad de aprender, si adquiere información durante la operación, acerca de comportamientos desconocidos de la planta y su ambiente, de manera que la ejecución completa es mejorada. Con este enriquecimiento del controlador con el aprendizaje, es posible expandir la región de operación y finalmente la implementación de sistemas autónomos.

Una clase de modelos, que tiene la potencialidad de implementar este aprendizaje, son las redes neuronales artificiales. Ciertamente, la morfología neuronal del sistema nervioso es mucho más compleja. No obstante, una analogía simplificada puede ser desarrollada, la cual podría ser utilizada en aplicaciones de ingeniería. Basándose en esta comprensión simplificada, las estructuras de las redes neuronales artificiales pueden ser desarrolladas.

2.2 Modelo de una neuronal

Una red neuronal artificial (RNA) (3) es un elemento capaz de procesar gran cantidad de información de forma paralela y distribuida, inspirada de las redes neuronales biológicas (ver Fig.1), las cuales pueden almacenar conocimiento experimental y tenerlo disponible para su uso (4). Esta tiene algunas algunas similitudes con el cerebro, como lo son:

- 1 El conocimiento es adquirido a través del proceso de aprendizaje.
2. La conectividad entre neuronas es llamada pesos sinápticos y son utilizados para almacenar el conocimiento.

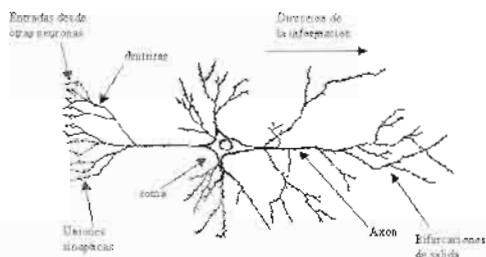


Figura 1 Esquema de una neurona biológica.

El procedimiento para el proceso de aprendizaje es conocido como el algoritmo de aprendizaje. Su función es modificar los pesos sinápticos de las redes para alcanzar una meta preestablecida. La modificación de los pesos provee el método tradicional para el diseño e implementación de las redes neuronales.

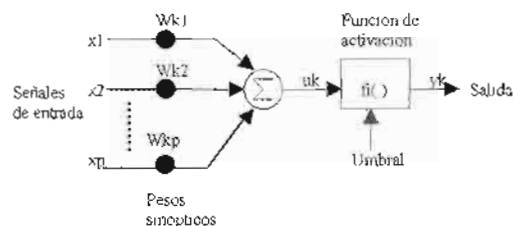


Figura 2 Modelo no-lineal de una neurona.

La neurona es la unidad fundamental para la operación de la red neuronal. La Fig. 2 muestra el esquema de una neurona.

Existen 3 elementos básicos de la RNA:

1. Un conjunto de uniones de sinápsis, con cada elemento caracterizado por su propio peso.
2. Un sumador que suma los componentes de la señal de entrada, multiplicados por su respectivo peso sináptico.
3. Una función de activación no-lineal que transforma la salida del sumador en la entrada de la siguiente neurona.

Un umbral externo es también aplicado para reducir la entrada a la función de activación. En términos matemáticos, la *i*-ésima neurona puede ser descrita como:

$$u_i = \sum_{j=1}^n w_{ij} x_j$$

$$y_i = \sigma(u_i - \rho_i)$$

(Ec. 2)

donde:

- x_j j -ésimo componente de la entrada.
- w_{ij} peso de la conexión entre la j -ésima componente de la entrada y la i -ésima neurona.
- u_i salida del sumador.
- ρ_i umbral.
- $\sigma(\cdot)$ función de activación no-lineal.
- y_i salida de la i -ésima neurona.

La función de activación no-lineal, es denotada por $g(\cdot)$ y genera el elemento de la salida y_i , recibiendo como entrada x_i :

$$y_i = g(x_i)$$

(Ec. 3)

2.3 Estructura de las redes neuronales

La forma como las neuronas de una red neuronal están interconectadas determina su estructura. Para propósitos de identificación y control, las estructuras más usadas son:

1. Redes de alimentación hacia adelante de una capa.
2. Redes de alimentación hacia adelante multicapa.
3. Redes de funciones radiales básicas
4. Redes neuronales dinámicas.

2.3.1 Redes neuronales dinámicas

Este tipo de redes se distinguen de las redes neuronales estáticas en que éstas tienen al menos un ciclo de retroalimentación. Estos ciclos involucran el uso del tiempo discreto, y de bifurcaciones compuestas por elementos de una unidad de retraso. Esta unidad se denota por q^{-1} , tal que $u(k-1) = q^{-1} u(k)$, con k indicando el k -ésimo muestreo en el tiempo. La ecuación de las redes neuronales dinámicas sería:

Tiempo discreto:

$$y(k+1) = g \left[\begin{matrix} y(k), y(k+1), \dots, y(k-n), \\ u(k), u(k+1), \dots, u(k-m) \end{matrix} \right]$$

(Ec. 4)

Tiempo continuo:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + w_1\sigma(v_1x) + w_2\phi(v_2x)u$$

(Ec. 5)

donde $\sigma(\cdot)$ y $\phi(\cdot)$ son funciones sigmoideas.

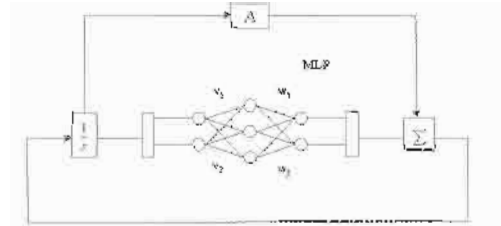


Figura 3 Esquema de una red neuronal dinámica

Los ciclos de retroalimentación (ver Figura 3) resultan en un comportamiento dinámico no-lineal debido a la función de activación no-lineal de las neuronas. De ahí que el término de las redes neuronales dinámicas (RND) describe mejor este tipo de estructura de las redes neuronales. Debido a estos hechos, las llamaremos redes neuronales dinámicas.

Estas pueden ofrecer grandes ventajas computacionales. De hecho, es bien sabido que un sumador lineal estático finito es equivalente a un sistema lineal retroalimentado de un solo polo, como se ve en la Figura 4.



Figura 4 Sistema dinámico y estático equivalente

De la Figura 4, el sumador de salida de el sistema dinámico es:

$$\begin{aligned} v(k) &= u(k) + u(k+1) + \dots + u(k-n) \\ &= \sum_{i=0}^n u(k-i), \quad n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

(Ec. 6)

El sistema lineal descrito por:

$$\begin{aligned}
 v(k) &= v(k-1) + u(k) \\
 \frac{v(k)}{u(k)} &= \frac{1}{1 - q^{-1}} = 1 + q^{-1} + q^{-2} + \dots + q^{-n} \\
 v(k) &= u(k) + u(k-1) + \dots + u(k-n)
 \end{aligned}
 \tag{Ec. 7}$$

Es claro que las dos estructuras son equivalentes, pero desde el punto de vista computacional, el sistema con retroalimentación es equivalente a una muy grande, posiblemente infinita, estructura estática. Esta propiedad es muy interesante para identificación y control, y abre el camino para las aplicaciones de las redes neuronales dinámicas en estos campos.

2.4 Redes Neuronales en Identificación

Las redes neuronales tienen el potencial de ser aplicadas para modelar sistemas no-lineales. Una pregunta importante es si el sistema es identificable (5), i.e. si puede ser el sistema dinámico en consideración, adecuadamente representado sin ser necesario dar un modelo estructurado particular. La Identificabilidad en redes neuronales está relacionada a la unicidad de los pesos y si dos redes con diferentes parámetros pueden producir un comportamiento idéntico entrada/salida. Resultados en este tema se encuentran en (6) para redes neuronales estáticas, y en (7) para las dinámicas.

Para representar los sistemas no-lineales con redes neuronales, una aproximación correcta es incrementar las entradas de la red con señales correspondientes a sus entradas y salidas. Asumiendo que el sistema no-lineal está descrito por, ver (3):

$$\begin{aligned}
 y(k+1) &= g \left[\begin{matrix} y(k), y(k+1), \dots, y(k-n), \\ u(k), u(k+1), \dots, u(k-m) \end{matrix} \right] \\
 y, u &\in \mathbb{R}, \quad m \leq n
 \end{aligned}
 \tag{Ec. 8}$$

Este modelo no considera las perturbaciones directamente. Para un método que in-

cluya las perturbaciones, ver (8). Casos especiales de este modelo son considerados en (9).

Una aproximación obvia del modelo del sistema es seleccionar la estructura de entrada/salida de la red neuronal para que sea la misma que tiene el sistema. Denotando la salida de la red neuronal como y_{nn} , existen dos posibles estrategias.

2.4.1 Estrategias de Identificación

Existen 2 tipos de modelos:

- a) **Modelo serie paralelo:** En este caso, las salidas del sistema y son usadas como entradas de la red neuronal, este modelo esta descrito por la (Ec. 9).

$$y_{nn}(k+1) = g \left[\begin{matrix} y(k), y(k+1), \dots, y(k-n), \\ u(k), u(k+1), \dots, u(k-m) \end{matrix} \right]
 \tag{Ec. 9}$$

Dado que no existe recursividad en la ecuación, ésta corresponde a una red neuronal estática como la que se muestra en la Figura 5.

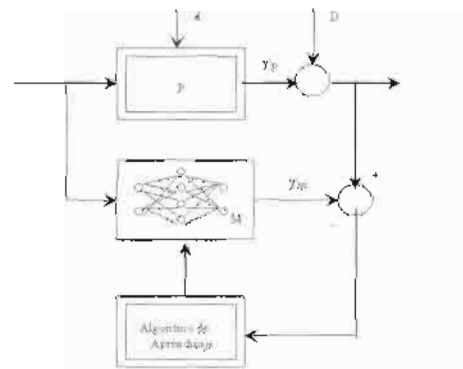


Figura 5 Esquema de identificación de una red estática

- b) **Modelo paralelo:** En este modelo las salidas pasadas de la red neuronal son usadas como componentes de la entrada de la red, este modelo está descrito por:

$$y_{nn} = g \begin{bmatrix} y_{nn}(k), y_{nn}(k+1), \dots, y_{nn}(k-n), \\ u(k), u(k+1), \dots, u(k-m) \end{bmatrix}$$

(Ec. 10)

Dado que existe una recursividad de y_{nn} en la (Ec. 10), esta corresponde a una red neuronal dinámica.

Observación 1: La regla de actualización de pesos de la estructura serie paralelo (10), (11) y la estructura paralelo son muy similares, la única diferencia es que la serie paralelo obtiene a la matriz de ganancia P de la solución de la siguiente ecuación de Lyapunov:

$$PA + A^T P = -Q$$

(Ec. 11)

En el caso de la estructura paralelo obtiene la matriz de ganancia P de la solución de la ecuación de Ricatti.

2.4.2 Aproximación del Perceptrón Dinámico Multicapa

Considere el siguiente perceptrón dinámico multicapa (PDM) en tiempo continuo:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x}_t + W_{1,t} \sigma(V_{1,t} \hat{x}_t) + W_{2,t} \phi(V_{2,t} \hat{x}_t) u_t$$

(Ec. 12)

donde $\forall t \in [0, \infty)$:

$\hat{x}_t \in \mathfrak{R}^n$ es el vector de estados de la red neuronal.

$u_t \in \mathfrak{R}^k$ es el vector de entradas

$A \in \mathfrak{R}^k$ es una matriz estable, que puede ser seleccionada.

$W_{1,t} \in \mathfrak{R}^{n \times m}$, $W_{2,t} \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ son los pesos de las capas ocultas de la red neuronal.

$\sigma(\cdot) \in \mathfrak{R}^m$ es un vector de funciones sigmoideas.

$\phi(\cdot) \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ es matriz diagonal, i.e.,

$$\phi(\cdot) = \text{diag}[\phi_1(V_{2,1} \hat{x}_t), \dots, \phi_m(V_{2,m} \hat{x}_t)]$$

Si $k < m$, entonces $u_i = 0$ para $i = k+1, \dots, m$.

Las funciones sigmoideas usadas en $\sigma(\cdot)$ y $\phi(\cdot)$ cumplen con la (Ec. 12)

$$\sigma_i(x_i) = \frac{a_i}{1 + e^{-b_i x_i}} - c_i$$

(Ec. 13)

La estructura del perceptrón dinámico se muestra en la Figura 6.

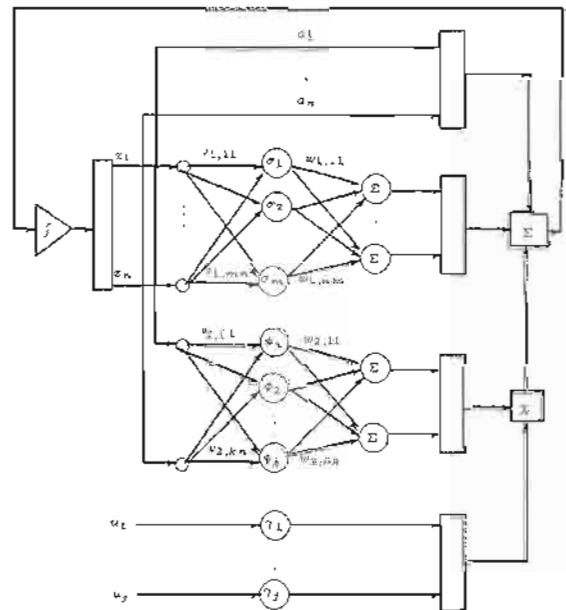


Figura 6 Estructura general del perceptrón dinámico multicapa

Las redes dinámicas convencionales (RND) son las redes neuronales que corresponden al caso:

$$m = n \quad \text{y} \quad V_1 = V_2 = I$$

(Ec. 14)

Usando el PDM de la (Ec. 12) para identificar el sistema no-lineal descrito por

$$\dot{x}_t = f(x_t, u_t), \quad \forall t \in [0, \infty) \tag{Ec. 15}$$

donde $x_t \in \mathbb{R}^n, u_t \in \mathbb{R}^m$ y $f: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial suave continuo, definido en un conjunto compacto $\Theta \in \mathbb{R}^{n+m}$.

Se asume que $f(x_t, u_t, t)$ satisface la condición de Lipschitz, i.e., existe una constante $l > 0$ tal que para todo par de puntos $(x_{1,t}, u_t), (x_{2,t}, u_t) \in \Theta$, se tiene que:

$$|f(x_{1,t}, u_t) - f(x_{2,t}, u_t)| \leq l |x_{1,t} - x_{2,t}| \tag{Ec. 16}$$

Problema 1: El problema de identificación del sistema dinámico consiste en determinar si existe un perceptrón dinámico multicapa (PDM) tal que la (Ec. 12) pueda aproximar el comportamiento entrada-salida del sistema dinámico de la (Ec. 14).

Si se define $W_t := [W_{1,t} \ W_{2,t}]$ y $\Phi_{V_t}(\hat{x}_t, u_t) := [\sigma(V_{1,t}\hat{x}_t) \ \phi(V_{2,t}\hat{x}_t)]^T$ y las (Ec. 12) y (Ec. 14) se describen como:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_t &= A\hat{x}_t + W_t \Phi_{V_t}(\hat{x}_t, u_t) \\ \dot{x}_t &= Ax_t + G(x_t, u_t) \end{aligned} \tag{Ec. 17}$$

donde: $G(x_t, u_t) = f(x_t, u_t) - Ax_t$.

Obsérvese que $W_t \Phi_{V_t}(\hat{x}_t, u_t)$ es una PDM en tiempo continuo, del teorema de Stone-Weierstrass si la capa oculta $(V_{1,t} \ V_{2,t})$ es lo suficientemente grande (m es suficientemente grande), $W_t \Phi_{V_t}(x_t, u_t)$ puede aproximarse $G(x_t, u_t)$ con cualquier grado de exactitud para todo $(x_t, u_t) \in \Theta$. Por ello existe

$W_t = W^* := [W_1^* \ W_2^*]$ y $V_t = V^* := [V_1^* \ V_2^*]$, tal que

$$\sup_{(x_t, u_t) \in \Theta} |G(x_t, u_t) - W^* \Phi_{V^*}(x_t, u_t)| \leq \delta \tag{Ec. 18}$$

donde δ es cualquier constante pequeña. Con base en las suposiciones anteriores se obtuvo el siguiente resultado.

Teorema 1 Sea el sistema dinámico (Ec. 14) y el perceptrón dinámico multicapa (Ec. 11), inician en el mismo estado $x_0 = \hat{x}_0$. Para cualquier $\varepsilon > 0$ y un tiempo finito $T > 0$, existe un entero m tal que el estado del PDM \hat{x}_t con pesos $[W_1^* \ W_2^* \ V_1^* \ V_2^*]$ satisface:

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |x_t - \hat{x}_t| < \varepsilon \tag{Ec. 19}$$

La demostración de este teorema puede ser revisada en (12).

2.5 Redes Neuronales en Control

Con una referencia específica en las redes neuronales en control las siguientes características y propiedades son importantes:

- Sistemas no-lineales:** Las redes neuronales son una gran promesa en el campo de los problemas del control no-lineal. Esta proviene de su teórica habilidad para aproximar mapeos no-lineales arbitrarios.
- Procesamiento Distribuido Paralelo:** Las redes neuronales tienen una estructura sumamente paralela que les permiten inmediatamente realizar una implementación paralela. Con tal implementación puede esperarse alcanzar un mayor grado de tolerancia a errores que los esquemas convencionales.

- c) Implementación en Hardware: Este punto está muy relacionado con el punto anterior. Las redes no sólo pueden ser implementadas en paralelo, algunos vendedores han introducido recientemente implementaciones utilizando un hardware dedicado VLSI. Este proporciona velocidad adicional e incrementa el número de redes que pueden ser implementadas.
- d) Aprendizaje y Adaptación: Las redes neuronales son entrenadas utilizando datos pasados del sistema en estudio. Una red propiamente entrenada tiene la habilidad de generalizar cuando se le introducen datos diferentes a los utilizados para su entrenamiento. Las redes pueden ser además adaptadas en línea.
- e) Fusión de Datos: Las redes neuronales pueden operar simultáneamente con datos cualitativos y cuantitativos. En este punto las redes se encuentran en algún lugar en medio del campo entre los sistemas tradicionales de ingeniería (Datos cuantitativos) y las técnicas de procesamiento del campo de la inteligencia artificial (datos simbólicos).
- f) Sistemas multivariables: Las redes neuronales naturalmente procesan muchas entradas y tienen muchas salidas; por lo que ellas pueden fácilmente ser aplicadas para sistemas multivariables.

Desde el punto de vista de la teoría de control, la habilidad de las redes neuronales para tratar con los sistemas no-lineales es muy importante. La gran diversidad de los sistemas no-lineales es la primera razón del por qué una teoría general y sistemática aplicable para el diseño de control no-lineal no ha sido todavía desarrollada. Sin embargo, existen algunos métodos tradicionales para el análisis y síntesis de controladores no-lineales para clases específicas de sistemas no-lineales, como lo son: métodos en el plano de fase, técnicas de linealización y funciones descriptivas.

Sin embargo, es la habilidad de las redes neuronales para representar mapeos no-lineales, y de modelar sistemas no-lineales, la característica más importante para usar a las redes neuronales en la realización de controladores no-

lineales. Una vista de las relaciones generales entre los campos de la ciencia del control y las redes neuronales es mostrada en la Figura 7. Los cuadros blancos son utilizados cuando una similitud obvia no exista.

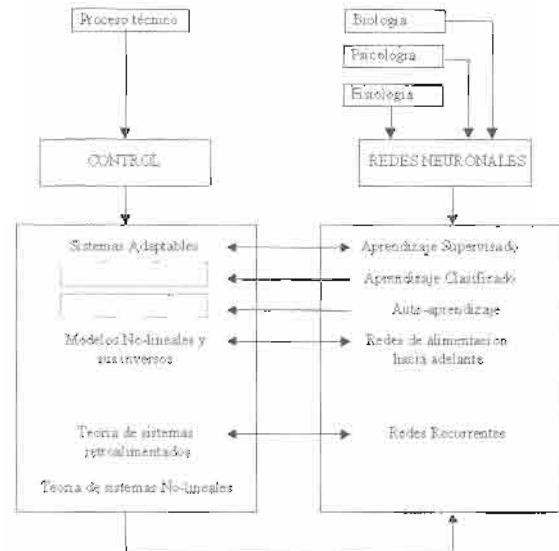


Figura 7 Relación entre las redes neuronales y el control

2.5.1 Estructuras de Control

Una gran cantidad de estructuras de control han sido propuestas. Para una revisión reciente y completa, ver (13) En la literatura de arquitecturas de redes neuronales aplicadas en el control han sido propuestas y usadas una gran cantidad de estructuras de control; aquí se muestran dos de las más importantes

1. **Control Directo:** En esta estructura (14), el neuro-controlador es entrenado sin tener el modelo de la planta. En este esquema, ver Figura 8 se busca que el resultado del lazo cerrado que contiene a la planta y al sistema dé como resultado un mapeo identidad. La acción de control busca que la planta siga la señal de referencia

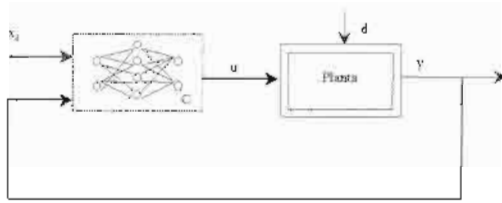


Figura 8 Esquema general del control directo

2. **Control Indirecto:** En esta estructura (14), primero un neuro-identificador estima el comportamiento de la planta, usando como información únicamente la salida del sistema, luego el neuro-controlador es diseñado con base en el modelo identificado, ver Figura 9. La acción de control busca que la planta siga la señal de referencia

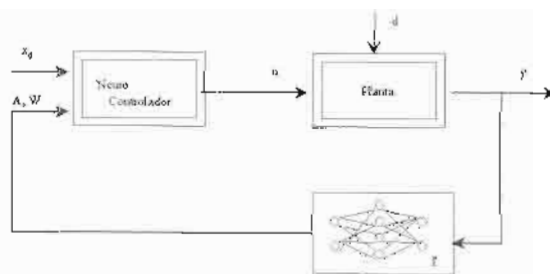


Figura 9 Esquema general del control indirecto

Observación 2 Note que en la Figura 8 y en la Figura 9 sólo se retroalimenta la información de la salida de la planta, esto es dado que se utilizan RND, por lo cual no se requiere del par entrada/salida, como en el caso de las RNE.

2.5.2 Control Adaptable.

Existe una diferencia entre el control adaptable directo e indirecto en el contexto de esta estructura. En los métodos indirectos, primero el sistema es identificado desde las medidas entrada/salida de la planta y después el controlador es adaptado basándose en el modelo identificado. En los métodos directos el controlador es aplicado sin realizar una identificación previa del sistema, por lo que ésta se lleva a cabo en línea. Las redes neuronales pueden ser utilizadas en ambos métodos.

Parte del control adaptable neuronal es basada en el método indirecto. En este método,

primero, un modelo del sistema es obtenido por la red neuronal en línea utilizando medidas de la planta y entonces una de las estructuras de control citadas anteriormente es implementada encima de este modelo adaptable neuronal.

Uno de los primeros resultados en redes neuronales adaptables no-lineales es (9), donde con base en modelos neuronales específicos, el controlador basado en el modelo adaptativo indirecto es implementado. En (15), un control adaptable IMC es desarrollado usando redes neuronales RNFB. Aplicaciones para control de robots, donde las RNE son usadas para estimar adaptativamente parte de la dinámica del robot, son presentadas en (16). Basada en un modelo identificado del sistema en línea por una RND, explicada anteriormente, en (10), la ley de control es construida para asegurar el seguimiento del modelo de referencia lineal.

Estimando un control neuronal adaptable directo, en (17), un controlador adaptable es desarrollado usando redes neuronales RBF. En (14), una combinación de ambos métodos es usada; de hecho, un modelo de una RND es adaptado en línea, también como un neuro-controlador dinámico.

3 MODELADO DEL SISTEMA NO-LINEAL TORA

3.1 Introducción

El sistema mostrado en la Figura 10 representa un oscilador traslacional con actuador rotacional (TORA) (18). Fue introducido por primera vez en (19), siendo utilizado como un sistema no-lineal estándar en un número reciente de trabajos (18), (19) con el propósito de realizar pruebas de comparación entre diferentes metodologías de control.

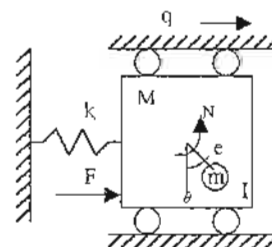


Figura 10 Oscilador Traslacional con Actuador Rotacional (TORA)

3.2 Modelo Lagrangiano

El oscilador consiste en un carro de masa M conectado con una pared fija por un resorte lineal con una constante de rigidez k . El carro está limitado a una dimensión de movimiento. El actuador que está unido al carro tiene una masa m y un momento de inercia I desde su centro de masa, que está localizado a una distancia e desde el punto en el cual la masa rota. El movimiento ocurre en el plano horizontal, por lo que la fuerza gravitacional no requiere ser considerada (ver Figura 10), donde N denota el control del torque aplicado a la masa m , y F es una fuerza de perturbación sobre el carro.

Sea q y \dot{q} la posición traslacional y la velocidad del carro, y sea ϑ y $\dot{\vartheta}$ la posición angular y la velocidad angular de la masa m , donde $\theta = 0^\circ$ es perpendicular al movimiento del carro, y $\theta = 90^\circ$ está alineado con la dirección positiva de q . Las ecuaciones del movimiento están dadas por:

$$\begin{aligned} (M+m)\ddot{q} + kq &= -m\epsilon(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) + F \\ (I+me^2)\ddot{\theta} &= -m\epsilon\ddot{q}\cos\theta + N \end{aligned} \tag{Ec. 20}$$

3.3 Modelo Normalizado

Usando las normalizaciones {Wan}:

$$\begin{aligned} \xi &\equiv \sqrt{\frac{M+m}{I+me^2}} q & \tau &\equiv \sqrt{\frac{k}{M+m}} t \\ u &\equiv \frac{M+m}{k(I+me^2)} N & w &\equiv \frac{1}{k} \sqrt{\frac{M+m}{I+me^2}} F \end{aligned} \tag{Ec. 21}$$

Las ecuaciones de movimiento se convierten en:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + \xi &= \epsilon(\dot{\theta}^2\sin\theta - \ddot{\theta}\cos\theta) + w \\ \ddot{\theta} &= -\epsilon\ddot{\xi}\cos\theta + u \end{aligned}$$

(Ec. 22)

donde ξ es la posición normalizada de la posición del carro, w y u representan una perturbación adimensional, el control del torque, respectivamente. En las ecuaciones normalizadas, el símbolo (\cdot) representa la diferenciación con respecto al tiempo normalizado τ . La unión entre el movimiento traslacional y el rotacional está representado por el parámetro ϵ , el cuál es definido por (un valor típico $\epsilon=0.1$).

$$\epsilon \equiv \frac{me}{\sqrt{(I+me^2)(M+m)}}$$

(Ec. 23)

3.4 Modelo de Primer Orden

Tomando $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [\xi, \dot{\xi}, \theta, \dot{\theta}]^T$, las ecuaciones adimensionales del movimiento de primer orden estarían dadas por:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + d(x)w \tag{Ec. 24}$$

donde

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{-x_1 + \epsilon x_4^2 \sin x_3}{1 - \epsilon^2 \cos^2 x_3} \\ x_4 \\ \frac{\epsilon \cos x_3 (x_1 - \epsilon x_4^2 \sin x_3)}{1 - \epsilon^2 \cos^2 x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\epsilon \cos x_3 \\ 1 - \epsilon^2 \cos^2 x_3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 - \epsilon^2 \cos^2 x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g_1 \\ 0 \\ g_2 \end{bmatrix}$$

$$d(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 - \epsilon^2 \cos^2 x_3 \\ 0 \\ -\epsilon \cos x_3 \\ 1 - \epsilon^2 \cos^2 x_3 \end{bmatrix}$$

(Ec. 25)

3.5 Modelo en Cascada

El sistema se describe de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \frac{\varepsilon \cos z_1}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 z_1} (z_3 - \varepsilon(1 + z_4^2) \sin z_1 - F) \\ &+ \frac{1}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 z_1} u \\ \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_4 &= -z_3 + \varepsilon \cos z_1 + F \\ y &= z_2 \end{aligned}$$

(Ec. 26)

Más detalles de la obtención de este modelo pueden ser revisados en (12). Para el resto del trabajo, ver (12), se asume que no existen perturbaciones, i.e. $F = 0$.

Observación 3 El modelo Lagrangiano, Normalizado y el de primer orden son utilizados para la identificación de este sistema usando RND. El modelo en cascada se obtuvo para implementar una acción de control usando este modelo vía redes neuronales dinámicas.

4 IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS NO-LINEALES

4.1 Introducción

La identificación es uno de los puntos esenciales en la teoría de control cuando no se cuenta con la información completa del sistema. Una solución efectiva es utilizar RNA, pues han mostrado ser una herramienta muy útil para identificar sistemas no-lineales complejos (1), aún cuando la planta es considerada como una "caja negra". Los neuro-identificadores pueden ser clasificados como estáticos y dinámicos (9). La mayoría de las publicaciones que presentan la identificación de sistemas no-lineales usan RNE, como por ejemplo el perceptrón multicapa, el cual es implementado para la aproximación de funciones no-lineales que se encuentran en el lado derecho de la ecuación que representa la dinámica del modelo (21).

La principal desventaja de las RNE es que la regla de actualización de los pesos utiliza infor-

mación local contenida en la estructura de los datos que se le presentan, por otra parte, la función de aproximación es sensible a los datos utilizados para su entrenamiento (4). Las RND pueden superar exitosamente esta desventaja dado que su estructura incorpora una retroalimentación (22) (10) (23).

4.2 RND de una capa para Identificación de Sistemas No-lineales

4.2.1 Estructura de la RND de una capa

El sistema no-lineal a ser identificado es de la forma:

$$\dot{x}_t = f(x_t, u_t, t), \quad x_t \in \mathfrak{R}^n, u_t \in \mathfrak{R}^m \quad (\text{Ec. 27})$$

Diferentes redes neuronales se proponen en {Rovithakis1, Rovithakis2, Kosmatopoulos1, Poznyak}, en esta sección se analizará la siguiente red neuronal de una capa {Yu}:

$$\dot{\hat{x}}_t = A\hat{x}_t + W_{1,t}\sigma(\hat{x}_t) + W_{2,t}\phi(\hat{x}_t)u_t \quad (\text{Ec. 28})$$

donde:

$\hat{x}_t \in \mathfrak{R}^n$ son los estados de la RND.

$u_t \in \mathfrak{R}^m$ es el control dado.

$W_{1,t} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $W_{2,t} \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ son las matrices de pesos.

$A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ es una matriz estable.

$\sigma(\cdot) \in \mathfrak{R}^n$ es un vector de funciones sigmoideas.

$\phi(\cdot) \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ es matriz diagonal, i.e.,

$$\phi(\cdot) = \text{diag}[\phi_1(V_{2,1} \hat{x}_t), \dots, \phi_m(V_{2,1} \hat{x}_t)].$$

Las funciones sigmoideas usadas cumplen $\sigma(\cdot)$ y $\phi(\cdot)$ con la (Ec. 12)

4.2.2 Preliminares

Considérense las siguientes suposiciones:

Suposición 1: El control u_t es seleccionado como acotado, entonces: $u_t \leq \bar{u}$

En el caso general, cuando la RND (Ec. 27) no puede identificar exactamente el sistema no-lineal dado (Ec. 27) este sistema puede ser representado como:

$$\dot{x}_n = a x_n + W_1^* \sigma(x) + W_2^* \phi(x) u_t + \tilde{f}_t \tag{Ec. 29}$$

donde:

\tilde{f}_t es el error de modelado.
 W_1^*, W_2^* son matrices constantes.

Dado que las funciones sigmoidales σ y ϕ son uniformemente acotadas, es razonable asumir que las dinámicas no-modeladas \tilde{f}_t , satisfacen la siguiente suposición:

Suposición 2: Existe una constante positiva $\bar{\eta}$ tal que: $\|\tilde{f}_t\|_{\infty} \leq \bar{\eta} \quad \Lambda_f = \Lambda_f^T > 0$

Definición 1: Sea el error de identificación:

$$\Delta_t \equiv x - \hat{x}$$

Suposición 3: Las funciones sigmoidales, comúnmente usadas en las RND satisfacen la condición de Lipschitz (12):

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_t^T \Lambda_1 \tilde{\sigma}_t &\leq \Delta_t^T \Lambda_\sigma \Delta_t, \\ (\tilde{\phi}_t u_t)^T \Lambda_2 (\tilde{\phi}_t u_t) &\leq \bar{u}^2 \Delta_t^T \Lambda_\phi \Delta_t, \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_t &\equiv \sigma(x_t) - \sigma(\hat{x}_t) & \tilde{\phi}_t &\equiv \phi(x_t) - \phi(\hat{x}_t) \\ \tilde{W}_{1,t} &\equiv W_1^* - W_{1,t} & \tilde{W}_{2,t} &\equiv W_2^* - W_{2,t} \end{aligned}$$

Λ_σ y Λ_ϕ son matrices definidas positivas.

Se conoce (24) que si la matriz A es estable, el par $(A, R^{1/2})$ es controlable, el par $(Q^{1/2}, A)$ es observable, y la condición especial local de frecuencia o su matriz equivalente:

$$A^T R^{-1} A - Q \geq \frac{1}{4} [A^T R^{-1} - R^{-1} A] \mathcal{N} [A^T R^{-1} - R^{-1} A]^T \geq 0 \tag{Ec. 30}$$

se cumple, entonces, la matriz de Riccati:

$$A^T P + PA + PRP + Q = 0 \tag{Ec. 31}$$

tiene una solución positiva. Siguiendo este hecho, se introduce adicionalmente la siguiente suposición.

Suposición 4: Para una matriz estable A dada, existe una matriz estrictamente positiva Q_1 tal que la ecuación de la matriz de Riccati (Ec. 31) con:

$$\begin{aligned} R &= 2\bar{W}_1 + 2\bar{W}_2 + \Lambda_f^{-1}, & Q &= Q_1 + \Lambda_\sigma + \bar{u}^2 \Lambda_\phi \\ \bar{W}_1 &\equiv W_1^{*T} \Lambda_1^{-1} W_1^*, & \bar{W}_2 &\equiv W_2^{*T} \Lambda_2^{-1} W_2^* \end{aligned}$$

tiene una solución positiva. Estas condiciones se cumplen fácilmente si se selecciona A como una matriz diagonal estable.

4.2.3 Regla de Actualización de Pesos

La regla dinámica de actualización de los pesos esta dada por:

$$\begin{aligned} \dot{W}_{1,t} &= -s_i \left[k_1 P \Delta_t \sigma(\hat{x}_t) \right]^T \\ \dot{W}_{2,t} &= -s_i \left[k_2 P \Delta_t \mu_i \phi(\hat{x}_t) \right]^T \end{aligned}$$

(Ec. 32)

donde:

$k_i \in \mathfrak{R}^1 (i = 1, 2)$ son las ganancias de la actualización de los pesos de la RND.

P es la solución de la ecuación de Riccati dada por (Ec. 31).

$W_{1,0} = W_1^*$, $W_{2,0} = W_2^*$ son las condiciones iniciales.

S_t es la función de zona muerta definida como:

$$s_t \equiv \left[1 - \frac{\mu}{\|P^{1/2}\Delta\|} \right]_+, \quad [z]_+ = \begin{cases} z & z \geq 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$$

$$\mu = \frac{\bar{\eta}}{\lambda_{\min}(P^{-1/2}QP^{-1/2})}$$

(Ec. 33)

4.3 Análisis de Estabilidad

Teorema 2: Se considera al sistema no-lineal (Ec. 27) y la RND de una capa (Ec. 28). Si se cumplen las suposiciones 1-4 y los pesos de la RND se ajustan de acuerdo a (Ec. 32). Los siguientes hechos se cumplen:

$$\Delta_t, W_{1,t}, W_{2,t} \in L^\infty$$

i.e. el error de identificación y los pesos de la RND están acotados, además el error de identificación satisface el siguiente desempeño de seguimiento:

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \Delta_t^T Q_t \Delta_t s_t dt \leq \bar{\eta}$$

La demostración de este teorema puede ser revisada en (12).

4.3.1 Simulaciones

Problema 2: Identificar los 4 estados del sistema no-lineal TORA (Ec. 26), usando una RND de una capa (Ec. 28).

Solución 1: Se usa la RND de una capa (Ec. 28), junto con la regla de actualización de pesos (Ec. 32) con:

Las condiciones iniciales para las matrices de los pesos son:

$$W_{1,0} = W_{2,0} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

estos valores se utilizarán para identificar al sistema.

Las simulaciones se llevaron a cabo usando el paquete matlab®. Los resultados obtenidos de identificación de los 4 estados se muestran en las Figuras 11-14.

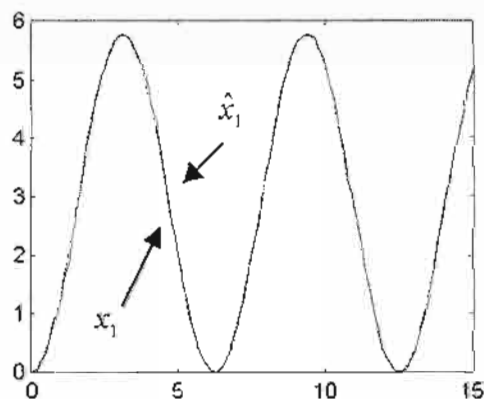


Figura 11 Identificación del estado usando la RND de una capa

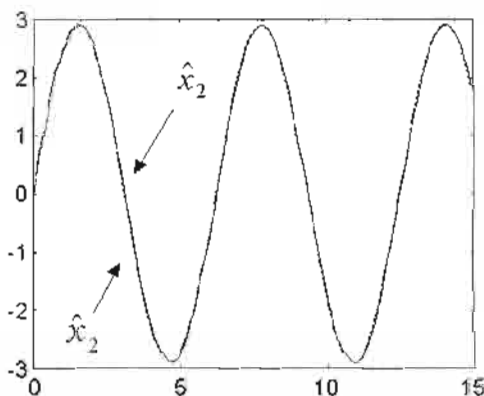


Figura 12 Identificación del estado usando la RND de una capa

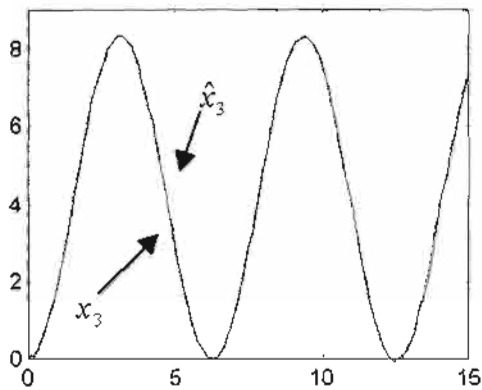


Figura 13 Identificación del estado usando la RND de una capa

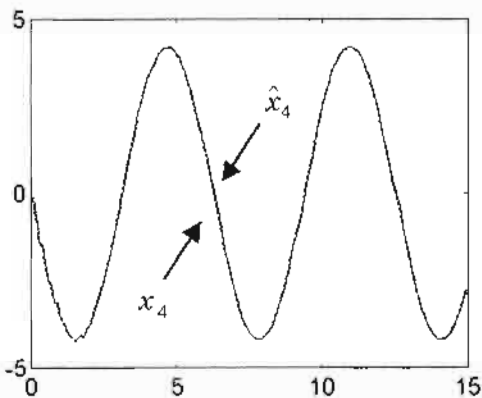


Figura 14 Identificación del estado usando la RND de una capa

Observación 4 Como se nota en las Figuras 11-14 los 4 estados x del sistema no-lineal son correctamente identificados por la RND, cuyos estados son \hat{x} .

5. CONTROL ADAPTABLE INDIRECTO USANDO RND.

5.1 Introducción

Las redes neuronales son una herramienta muy efectiva para controlar sistemas no-lineales complejos, cuando no se cuenta con información completa del modelo o cuando se considera a la planta a ser controlada como una "caja negra". Un panorama general del control neuronal puede ser revisado en (3).

En el control neuronal indirecto, el controlador se basa en la identificación del sistema no-lineal, por lo que el proceso de identificación se convierte en la parte central de la construcción del neuro-controlador. En esta dirección existen 2 tipos de estructuras: El modelo serie-paralelo y el modelo paralelo (9). El modelo serie-paralelo puede asegurar que todas las señales están acotadas, si la planta es BIBO estable como se muestra en (9) para las redes neuronales multicapa de propagación hacia adelante y en (10) (22) para las RND. Muchos trabajos publicados utilizan este modelo, aprovechando este resultado de estabilidad.

Por otra parte, el modelo paralelo es muy útil cuando se trabaja con sistemas con ruido, dado que este modelo elimina los problemas del bias causados, por el ruido generado por la salida del sistema real (25); además, dado que la identificación de un modelo usualmente se realiza fuera de línea, el modelo paralelo es más adecuado. Sin embargo, este modelo carece de verificación teórica, por lo cual, se requiere cubrir esta carencia para poder disfrutar de sus ventajas.

No existen muchos análisis de estabilidad en el campo del control neuronal, por lo que existen pocos resultados publicados que se refieran al análisis de sistemas no-lineales controlados por RND. En (22), (26) se presentan resultados de una versión particular de las redes neuronales de alto orden. En (27), (28) una cota al error de identificación es dado usando un análisis tipo Lyapunov. Es importante mencionar que la metodología del análisis de estabilidad presentada a continuación es muy similar a la presentada en (29).

5.2 Planteamiento del Problema

La clase de sistemas no-lineales:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f(x) + g(x)u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

(Ec. 34)

con:

$x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ son los estados del sistema.

$f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funciones suaves desconocidas con $\tilde{f}_i(0) = 0$.

Problema 3 Identificar el sistema (Ec. 34) y diseñar el neuro-controlador que resuelva el problema de seguimiento, usando una RND.

5.3 Estructura de la RND.

La RND multicapa tiene siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= \hat{x}_2 \\ \hat{x}_2 &= \hat{x}_3 \\ &\vdots \\ \hat{x}_n &= a\hat{x}_n + W_{1,i}\sigma(V_{1,i}\hat{x}) + W_{2,i}\phi(V_{2,i}\hat{x})u \\ \hat{y} &= \hat{x}_1 \end{aligned} \tag{Ec. 35}$$

donde:

$\hat{x}_i \in \mathbb{R}^n$ son los estados de la RND.
 $u_i \in \mathbb{R}^n$ es el control dado.
 $W_{1,i} \in \mathbb{R}^{1 \times n}, W_{2,i} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ son los pesos de la RND que describen las conexiones de las capas ocultas y de salida.
 $a \in \mathbb{R}$ con $a < 0$.
 $\sigma(\cdot) \in \mathbb{R}^m$ es un vector de funciones sigmoideas.
 $\phi(\cdot) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es matriz diagonal, i.e.,
 $\phi(\cdot) = \text{diag}[\phi_1(V_{2,1}\hat{x}_1), \dots, \phi_m(V_{2,m}\hat{x}_m)]$.
 Las funciones sigmoideas usadas en $\sigma(\cdot)$ y $\phi(\cdot)$ cumplen con la (Ec. 12)

5.4 Preliminares

Considérense las siguientes suposiciones:

Suposición 5: El control u_i es seleccionado como acotado, entonces: $u_i \leq \bar{u}$

En el caso general, cuando la RND (Ec. 35) no puede identificar exactamente el sistema no-lineal dado (Ec. 34) este sistema puede ser representado como:

$$\dot{x}_n = ax_n + W_1^* \sigma(V_1^* x) + W_2^* \phi(V_2^* x)u_i + \tilde{f}_i \tag{Ec. 36}$$

donde:

\tilde{f}_i es el error de modelado.

$W_1^*, W_2^*, V_1^*, V_2^*$ son matrices constantes.

Dado que las funciones sigmoideas σ y ϕ son uniformemente acotadas, es razonable asumir que las dinámicas no-modeladas \tilde{f}_i , satisfacen la siguiente suposición:

Suposición 6: Existe una constante positiva

$$\bar{\eta} \text{ tal que: } \|\tilde{f}_i\|_{\Lambda}^2 \leq \bar{\eta} \quad \Lambda_f = \Lambda_f^T > 0$$

Definición 2: Sea el error de identificación:

$$\Delta_i \equiv x - \hat{x}$$

Suposición 7: Las funciones sigmoideas, comúnmente usadas en las RND satisfacen la condición de Lipschitz (12):

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_i^T \Lambda_1 \tilde{\sigma}_i &\leq \Delta_i^T \Lambda_\sigma \Delta_i, \\ (\tilde{\phi}_i u_i)^T \Lambda_2 (\tilde{\phi}_i u_i) &\leq \bar{u}^2 \Delta_i^T \Lambda_\phi \Delta_i, \\ \tilde{\sigma}_i^j &\equiv D_\sigma \bar{V}_{1,i} \hat{x}_i + v_\sigma \\ \tilde{\phi}_i u_i &\equiv D_\phi \bar{V}_{2,i} \hat{x}_i + v_\phi \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_t &\equiv \sigma(V_1^* x_t) - \sigma(V_1^* \hat{x}_t) \\ \tilde{\sigma}_t^i &\equiv \sigma(V_1^i \hat{x}_t) - \sigma(V_1^* \hat{x}_t) \\ \tilde{\phi}_t &\equiv \phi(V_2^* x_t) - \phi(V_2^* \hat{x}_t) \\ \tilde{\phi}_t u_t &\equiv \phi(V_2^* \hat{x}_t) u_t - \phi(V_2^* \hat{x}_t) u_t \\ D_{\sigma} &= \frac{\partial \sigma^T(Z)}{\partial Z} \Big|_{Z=V_{1,t} \hat{x}_t} \in \mathbb{R}^{m \times m} \\ D_{\phi} &= \frac{\partial (\phi u_t)^T(Z)}{\partial Z} \Big|_{Z=V_{2,t} \hat{x}_t} \in \mathbb{R}^{m \times m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|V_{\sigma}\|_{\Lambda_1}^2 &\leq l_1 \|\tilde{V}_{1,t} \hat{x}_t\|_{\Lambda_1}^2, \quad l_1 > 0 \\ \|V_{\phi}\|_{\Lambda_2}^2 &\leq l_2 \|\tilde{V}_{2,t} \hat{x}_t\|_{\Lambda_2}^2, \quad l_2 > 0 \\ \tilde{V}_{2,t} &\equiv V_2^* - V_{2,t} \\ \tilde{V}_{1,t} &\equiv V_1^* - V_{1,t} \\ \tilde{W}_{2,t} &\equiv W_2^* - W_{2,t} \\ \tilde{W}_{1,t} &\equiv W_1^* - W_{1,t} \end{aligned}$$

$\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_o$ y Λ_{ϕ} son matrices definidas positivas.

Se conoce (24) que si la matriz A es estable, el par $(A, R^{1/2})$ es controlable, el par $(Q^{1/2}, A)$ es observable, y la condición especial local de frecuencia o su matriz equivalente:

$$A^T R^{-1} A - Q \geq \frac{1}{4} [A^T R^{-1} - R^{-1} A] R [A^T R^{-1} - R^{-1} A] \quad (Ec. 37)$$

se cumple, entonces la matriz de Riccati:

$$A^T P + PA + PRP + Q = 0 \quad (Ec. 38)$$

tiene una solución positiva. Siguiendo este hecho, se introduce adicionalmente la siguiente suposición:

Suposición 8: Para una matriz estable A dada, existe una matriz estrictamente positiva Q , tal

que la ecuación de la matriz de Riccati (Ec. 38) con:

$$\begin{aligned} R &= 2\bar{W}_1 + 2\bar{W}_2 + \Lambda_f^{-1}, \quad Q = Q_1 + \Lambda_o + \bar{u}^2 \Lambda_{\phi} \\ \bar{W}_1 &\equiv W_1^{*T} \Lambda_1^{-1} W_1^*, \quad \bar{W}_2 \equiv W_2^{*T} \Lambda_2^{-1} W_2^* \end{aligned}$$

tiene una solución positiva. Estas condiciones se cumplen fácilmente si se selecciona A como una matriz diagonal estable.

5.5 Regla de Actualización de Pesos

La regla dinámica de actualización de los pesos dada por:

$$\begin{aligned} \dot{W}_{1,t} &= -s_t [K_1 P \Delta_t \sigma^i - K_1 P \Delta_t \hat{x}_t^T \tilde{V}_{1,t}^T D_{\sigma}] \\ \dot{W}_{2,t} &= -s_t [K_2 P \Delta_t (\phi u_t)^T - K_2 P \Delta_t \hat{x}_t^T \tilde{V}_{2,t}^T D_{\phi}] \\ \dot{V}_{1,t} &= -s_t [K_3 P W_{1,t} D_{\phi} \Delta_t \hat{x}_t^T - \frac{l_1}{2} K_3 \Lambda_1 \tilde{V}_{1,t} \hat{x}_t \hat{x}_t^T] \\ \dot{V}_{2,t} &= -s_t [K_4 P W_{2,t} D_{\phi} \Delta_t \hat{x}_t^T - \frac{l_2}{2} K_4 \Lambda_2 \tilde{V}_{2,t} \hat{x}_t \hat{x}_t^T] \end{aligned}$$

(Ec. 39)

donde:

$K_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ($i = 1, \dots, 4$) son matrices definidas positivas.

P es la solución de la ecuación matricial de Riccati dada por (Ec. 31).

$W_{1,0} = W_1^*, W_{2,0} = W_2^*, V_{1,0} = V_1^*, V_{2,0} = V_2^*$ son las condiciones iniciales.

s_t es la función de zona muerta definida como:

$$\begin{aligned} s_t &\equiv \begin{cases} 1 - \frac{\mu}{\|P^{1/2} \Delta\|_t} & z \geq 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases} \\ \mu &= \frac{\bar{\eta}}{\lambda_{\min}(P^{-1/2} Q_1 P^{-1/2})} \end{aligned}$$

(Ec. 40)

5.6 Análisis de Estabilidad

Teorema 3: Se considera al sistema no-lineal (Ec. 34) y la RND multicapa (Ec. 35). Si se

cumplen las suposiciones 5-8 y los pesos de la RND se ajustan de acuerdo con (Ec. 39). Los siguientes hechos se cumplen:

$$\Delta_t, W_{1,t}, W_{2,t}, V_{1,t}, V_{2,t} \in L^\infty$$

i.e. el error de identificación y los pesos de la RND están acotados, además el error de identificación satisface el siguiente desempeño de seguimiento:

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \Delta_t^T Q \Delta_t dt \leq \bar{\eta}$$

La demostración de este teorema puede ser revisada en (12).

5.7 Diseño del Neuro Controlador

La linearización por retroalimentación es muy útil para resolver el problema de seguimiento:

Problema 4: Dada una salida deseada $y_d(t)$, encontrar una acción de control u tal que la planta siga una trayectoria deseada con una precisión aceptable (i.e. error de seguimiento acotado), mientras que todos los estados del sistema y el control permanezcan acotados.

Para resolver este problema, se requiere establecer las siguientes suposiciones. Primero definase el vector:

$$x_d(t) = [y_d \ \dot{y}_d \ \dots \ y_d^{(n-1)}]^T$$

Suposición 9 El vector de la trayectoria deseada $x_d(t)$ es continuo y disponible para su medición, y $\|x_d(t)\| \leq D$ con D una cota conocida.

Definición 3 Sea la siguiente semi-norma:

$$\|z\|_Q^2 = \limsup_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau z^T(t) Q z(t) dt \tag{Ec. 41}$$

donde: $Q = Q^T > 0$

Así, el seguimiento de esta trayectoria por los estados del sistema, puede formularse como:

$$J_{\min} = \min_{u(t)} J, J = \|x - x_d\|_{Q_c}^2 \tag{Ec. 42}$$

Así, para cualquier $\eta > 0$, se tiene

$$J \leq (1 + \eta) \|x - \hat{x}\|_{Q_c}^2 + (1 + \eta^{-1}) \|\hat{x} - x_d\|_{Q_c}^2 \tag{Ec. 43}$$

El término $\|x - \hat{x}\|_{Q_c}^2$ indica la diferencia existente entre los estados de la planta y los estados de la RND, el mínimo se obtiene al aplicar el Teorema 3 de la sección anterior.

Ahora, seleccionando $\tilde{R}_c = (1 + \eta^{-1})R_c$, se puede reformular nuestro objetivo de control como: minimizar el término $\|\hat{x} - x_d\|_{Q_c}^2$.

Entonces:

Definición 4 Sea el error de seguimiento:

$$e = \hat{x} - x_d \tag{Ec. 44}$$

y el filtro del error:

$$r = [\Lambda^T \ 1] e \in \mathfrak{R}$$

donde: $\Lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}]^T$ y los coeficientes del vector son apropiadamente seleccionados.

tal que $e \rightarrow 0$ exponencialmente como $r \rightarrow 0$ ($s^{n-1} + \lambda_{n-1} s^{n-2} + \dots + \lambda_1$ es Hurwitz).

Así la derivada en tiempo del filtro del error se describe como:

$$\dot{r} = [\lambda_1 \dots \lambda_{n-1} \ 1] \begin{bmatrix} \hat{x}_1 - \hat{x}_d \\ \vdots \\ \hat{x}_{n-1} - \hat{x}_d^{n-1} \\ \hat{x}_n - \hat{x}_d^n \end{bmatrix}$$

$$\dot{r} = \lambda_1(\hat{x}_1 - \hat{x}_d) + \dots + (\hat{x}_{n-1} - \hat{x}_d^{n-1}) + (\hat{x}_n - \hat{x}_d^n)$$

$$\dot{r} = [\Lambda^T \ 0]e + (\hat{x}_n - \hat{x}_d^n)$$

$$\dot{r} = \hat{f} + \hat{g}u + Y_d$$

(Ec. 45)

donde: $Y_d = ax_n - x_d^n + [\Lambda^T \ 0]e$

Además:

$$\hat{f} = W_{1,i}^* \sigma(V_{1,i}^* \hat{x})$$

$$\hat{g} = W_{2,i}^* \phi(V_{2,i}^* \hat{x})$$

(Ec. 46)

Ahora, dado que las funciones f, g no son conocidas, se elige la acción de control $u_c \in \mathfrak{R}$ como:

$$u = \frac{1}{\hat{g}}[-\hat{f} + v]$$

(Ec. 47)

donde: $v = -K_v r - Y_d$

Así:

$$\dot{r} = \hat{f} + \hat{g}u + Y_d + v - v$$

$$\dot{r} = \hat{f} + \hat{g}\left(\frac{1}{\hat{g}}[-\hat{f} + v]\right) + Y_d - Y_d - K_v r - v$$

$$\dot{r} = \hat{f} - \hat{f} + v - v - K_v r$$

$$\dot{r} = -K_v r$$

(Ec. 48)

Observación 4 Si se selecciona $K_v > 0$ el error de seguimiento es estable y además $r \rightarrow 0$.

5.8 Simulaciones

Problema 5 Hallar la ley de control indirecto, que resuelva el problema de seguimiento con

$x_d = [0, 0, 0, 0]$ para el sistema no-lineal TORA (Ec. 26), usando una RND.

Solución 2 Se usa la RND de una capa (Ec. 35), junto con la regla de actualización de pesos (Ec. 39), para identificar al sistema y luego obtener la acción de control, utilizando los siguientes valores en los parámetros:

$W_{1,2} \in \mathfrak{R}^{1 \times 4}$ los vectores de pesos de la RND.

$W_1 = [1 \ 1 \ 1 \ 2]$ $W_2 = [1 \ 2 \ 1 \ 2]$ las condiciones iniciales de los pesos de la RND.

$\sigma(x) = \frac{2}{(1 + e^{-2x})} - 0.5$ la función de activación.

$\bar{\eta} = 0.2, \Lambda = [-1 \ -1 \ -1]$ el valor de la cota de la zona muerta y los valores del vector del filtro del error.

$K_{1,2} = 560, K_v = 0.1$ los valores de las ganancias de aprendizaje de la red y del controlador.

Las simulaciones se llevaron a cabo usando el paquete matlab. Los resultados obtenidos de aplicar la acción de control se muestran en las Figuras 15-19.

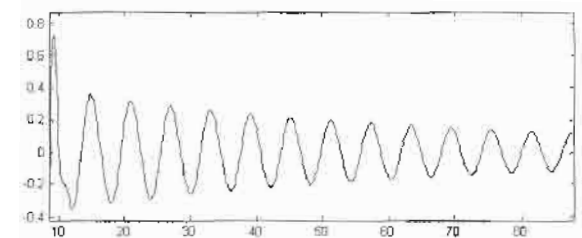


Figura 15 Comportamiento en tiempo de la ley de control (Ec. 47).

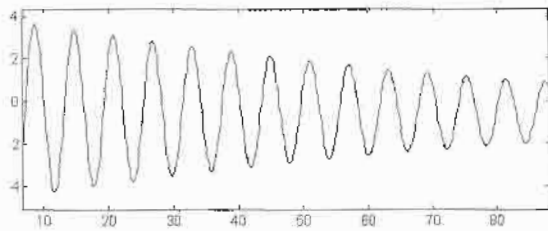


Figura 16 Control Adaptable Indirecto para el estado q .

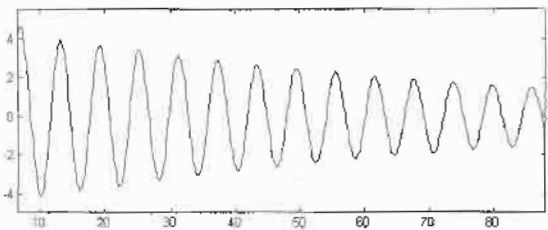


Figura 17 Control Adaptable Indirecto para el estado \dot{q} .

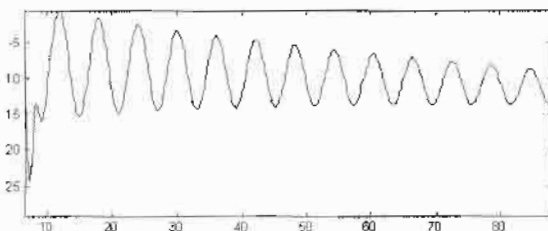


Figura 18 Control Adaptable Indirecto para el estado θ .

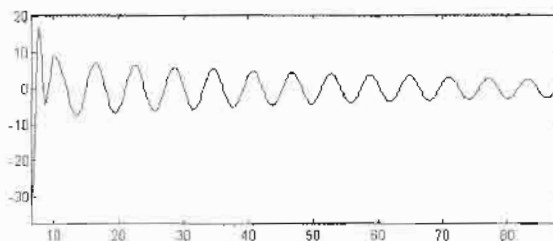


Figura 19 Control Adaptable Indirecto para el estado $\dot{\theta}$.

5.8.1 Discusión de Resultados

Como se puede ver en las Figuras 11-14, la etapa de identificación del sistema no-lineal TORA fue satisfactoria, con lo cual se muestra que una RND de una capa tiene una gran capacidad de adaptación a las no-linealidades del sistema.

El control adaptable indirecto dado por la ley de control (Ec. 47), identifica y retroalimenta las dinámicas no-lineales de la planta, linealizando al sistema; sin embargo, éste se ve afectado por el resultado obtenido de la identificación del sistema TORA, cuyo error afecta directamente la acción de control, estabiliza al sistema, no obstante este oscila más de lo deseado, y por lo que los estados no llegan exactamente al cero, que es el valor deseado.

Por otra parte, se presenta a las redes neuronales dinámicas como una poderosa herramienta para la aproximación de sistemas no-lineales (ver Teorema 1), aplicándolas efectivamente en la identificación y control de sistemas no-lineales, como el sistema no-lineal estándar propuesto en (18) (19).

REFERENCIAS

- (1) Cybenko G, "Approximation by Superposition of a Sigmoidal Function", *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, vol. 2, pp. 303-314, 1989.
- (2) Gupta M.M. & Rao D.N., Editors, *Neuro-Control Systems, Theory and Applications*, IEEE Press, USA, 1994.
- (3) Hunt K.J., Sbarbaro D., Zbikowski R. & Gawthrop P.J., "Neural Networks for Control Systems", A Survey, *Automatica*, vol. 28, pp. 1083-1112, 1992.
- (4) Haykin S., *Neural Networks- A comprehensive Foundation*, Macmillan College Publ. Co., New York, 1994.
- (5) Lung L., *System Identification-Theory for the user*, Prentice Hall, New Jersey, USA, 1987.
- (6) Sussmann H.J., "Uniqueness of the weights for minimal feedforwrdnets with a given input-output map", *Neural Networks*, vol. 5, pp. 589-593, 1992.
- (7) Albertini F. & Sontag E.D., "For neural networks function determines form", *Neural Networks*, vol. 6, pp. 975-990, 1993.

- (8) Chen S., Billings S.A., Cowan C.F. & Grant P.M., Practical identification of NARMAX models using radial basis functions, *Int. Journal of Control*, vol. 52, pp. 1327-1350, 1990.
- (9) Narendra K.S., & Parthasarathy K., Identification and control for dynamic systems using neural networks, *IEEE Trans. on Neural Networks*, vol. 1, pp. 4-27, 1990
- (10) Rovithakis G.A. & Christodoulou M.A., "Adaptive Control of Unknown Plants Using Dynamical Neural Networks", *IEEE Trans. on Syst., Man and Cybern.*, Vol. 24, pp. 400-412, 1994.
- (11) Rovithakis G.A. & Christodoulou M.A., "Direct Adaptive Regulation of Unknown Nonlinear Dynamical System via Dynamical Neural Networks", *IEEE Trans. on Syst., Man and Cybern.*, Vol 25, 1578-1594, 1995.
- (12) Moreno M.A., *Control adaptable del sistema no-lineal TORA usando redes neuronales dinámicas*, Tesis de Maestría, CINVESTAV, 1999.
- (13) Agarwal M., "A systematic classification of neural network based control", *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 17, pp 75-93, 1997.
- (14) Suykens J.A, Vandewalle J.P.L & De Moor B.L.R. *Artificial Neural Networks for Modeling and Control of Non-linear Systems*, Kluwer Academic Publishers, 1997.
- (15) Sbarbaro D.G., *Connectionist feedforward networks for control of nonlinear systems*, Ph. D. Thesis, Faculty of Engineering, Glasgow University, 1992.
- (16) Lewis F.L., Liu K., & Yesilderek A., "Neural net robot controller with guaranteed tracking performance", *IEEE Trans. on Neural Networks*, vol. 6, pp. 703-715, 1995.
- (17) Slotine J.J. & Sanner R.M., "Neural networks for adaptive control and recursive identification. a theoretical framework", *Essays on Control: Perspectives in the theory and its applications*, Tretelman H.L. & Willems J.C. Editors, Birkhauser, Germany, 1993.
- (18) Bupp R.T., Bernstein D.S. & Coppola V.T., "A Benchmark problem for nonlinear control design", *Int J Robust Nonlinear Control*, vol.8, pp. 307-310, 1998.
- (19) Wan C.J, Bernstein D.S. & Coppola V.T., "Global stabilization of the oscillating eccentric rotor, Proc", *IEEE Conf. Decision and Control*, Orlando, FL, 1994, 4024-4029. Also, *Nonlinear Dyn*, 10, 49-62, 1996.
- (20) Jiang Z., Hill D.J. & Guo Y., "Stabilization and tracking via output feedback for the nonlinear benchmark system", *Automatica*, vol.34, núm.7, pp 907-915, 1998.
- (21) Jagannathan S & Lewis F.L., "Identification of nonlinear dynamical systems using multi-layered neural networks", *Automatica*, vol.32, núm.12, pp. 1707-1712, 1996.
- (22) Kosmatopoulos E.B., Polycarpou M.M., Christodoulou M.A. & Ioannpu P.A., "High-Order Neural Network Structures for Identification of Dynamical Systems", *IEEE Trans. on Neural Networks*, Vol.6, Núm. 2, pp. 442-431, 1995.
- (23) Yu W., Poznyak A.S., "Indirect Adaptive Control via Parallel Dynamic Neural Networks", *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, Vol. 37, Núm. 1, 1999
- (24) Willems J.C., "Least squares optimal control and algebraic Riccati equations", *IEEE Trans on Automatic Control*, Vol. 16, Núm 6, pp 621-634, 1971.
- (25) Widrow B. & Steans S D., *Adaptive Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1985.
- (26) Kosmatopoulos E.B., Christodoulou M.A. & Ioannpu P.A., "Dynamical Neural Networks that Ensure Exponential Identification Error Convergence", *Neural Networks*, Vol.10, Núm .2, 299-314, 1997
- (27) Poznyak, A.S & Sánchez, E.N, "Nonlinear system approximation by neural networks error stability analysis", *Int. J. Intell. Autom Soft Comput*, vol 1, pp. 247-258, 1995.
- (28) Poznyak A.S., Yu W., Sanchez E.N. & Pérez J.P, "Stability Analysis of Dynamic Neural Control", *Expert System with Applications*, Vol.14, Núm. 1, 227-236, 1998
- (29) Wang K. & Mitchel A.N., "Robustness and perturbation analysis of a class of nonlinear systems with applications to neural networks", *IEEE Trans. on Circ. and Syst., Part 1*, Vol. 41, Núm. 1, pp. 24-32, Enero, 1994.