

Análisis experimental de la superposición de información en espacios de memoria aleatoria

A.T. Ramos Fonseca & J. Figueroa Nazuno
 Centro de Investigación en Computación-IPN
 Laboratorio de Cómputo Distribuido y Paralelo.
 E-mail <sadness@compaq.net.mx>
 <jfn@pollux.cic.ipn.mx>

Recibido: Abril de 2001. Aceptado Junio de 2001.

RESUMEN

En este trabajo se presenta un modelo de almacenamiento de información que es especialmente adecuado para sistemas neurocomputacionales no supervisados. Nuestro modelo utiliza como fundamento teórico el Teorema de Ramsey. Se demuestra experimentalmente que en una matriz discreta generada aleatoriamente y lo suficientemente grande (dependiente de $m \times n$), es posible encontrar cualquier matriz discreta de tamaño $m \times n$. La probabilidad $\rho(\varphi \subset M)$ de encontrar una submatriz de tamaño $m \times n$ dentro de un Espacio de Memoria Aleatoria específico aumenta al permitir grados de error acotado. Introducimos entonces el concepto de patrón de información. También aplicamos diferentes transformaciones lineales a la matriz original, lo cual amplía el espacio de búsqueda y por lo tanto también aumenta la probabilidad $\rho(\varphi \subset M)$. El modelo se implementa utilizando memorias de cuatro estados y se demuestra una de sus principales características: la superposición de información. Un mismo elemento físico de memoria se utiliza para almacenar varios patrones de información a un mismo tiempo. Se encuentra que para patrones de información de dimensión cuadrada $m \times m$ el máximo grado de superposición que se puede obtener es $(2m - 1)^2$ y que en un EMA de tamaño relativamente pequeño es posible almacenar una gran cantidad de patrones de información.

Palabras clave: Teorema de Ramsey, matriz discreta, Espacio de memoria aleatoria, patrón de información, superposición de información.

ABSTRACT

This works presents an information storing model, specially useful for neurocomputing non supervised systems. Our model uses Ramsey Theorem as a theoretical foundation. It is experimentally shown that in a discreet matrix randomly generated and large enough (dependant of $m \times n$) it is possible to find any discreet matrix of $m \times n$ size. The probability $\rho(\varphi \subset M)$ of finding a sub-matrix of $m \times n$ size within an specific Random Memory Space increases when allowing limited error degrees. We introduce then the concept of information pattern. We also apply diverse lineal transformations to the original matrix, which lenghtens the space of search and also increases the probability $\rho(\varphi \subset M)$. The model is implemented using memories of four stages and one of its main features is proven: information superposition. One sole physical element of memory is used to store several information patterns at the same time. It is found that for information patterns of squared dimension $m \times n$ the maximum degree of attainable superposition is $(2m - 1)^2$ and that in an EMA relatively small can be stored a great amount of information patterns.

Keywords: Ramsey theorem, discreet matrix, Random Memory Space, information pattern, information superposition.

1. INTRODUCCIÓN.

La necesidad de modelos de representación de grandes cantidades de información es característica dentro del campo de la neurocomputación². El objetivo de este trabajo es plantear un modelo de almacenamiento de información: el Espacio de Memoria Aleatoria (EMA). Este modelo tiene fundamento teórico en el Teorema de Ramsey, el cual de manera general afirma que si un grafo contiene suficientes vértices (valor dependiente de k), entonces debe contener un conjunto completo o un conjunto independiente de tamaño k^4 .

Nuestro modelo parte de la suposición de que dentro de una matriz discreta de un tamaño $i \times j$ suficientemente grande y con valores generados aleatoriamente, es posible encontrar cualquier matriz discreta de tamaño $m \times n$ que se desee, con una probabilidad directamente proporcional al tamaño de la matriz aleatoria e inversamente proporcional al tamaño de la submatriz que se busca.

De manera general, el modelo consiste en una matriz binaria M generada aleatoriamente. La información que se pretende buscar y almacenar es sometida a una transformación mediante la cual una cadena binaria s se convierte en una matriz φ . Se efectúa una búsqueda de φ en cada una de las transformaciones lineales definidas para la matriz M , hasta que se encuentra una submatriz Θ de M que es igual a φ . En ese momento se "marca" un elemento de memoria que tiene una posición específica dentro de Θ con una referencia a la transformación en que fue encontrada la submatriz. Esto permite la recuperación efectiva de todas las matrices φ y por lo tanto de toda la "información almacenada".

Dado que la utilización de los elementos de una submatriz Θ por una matriz φ_1 no impide que algunos de estos mismos elementos sean utilizados por algunas otras matrices $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$, es posible que varias matrices φ_i compartan un mismo espacio físico de memoria, dando lugar a la superposición de información (Figura 1).

0	1	1	1					
0	0	1	0		0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1	0
		1	0	1	0	0	1	1
		0	1	0	1			

Figura 1. Superposición de información en una matriz aleatoria.

Si permitimos que la búsqueda de matrices φ en el Espacio de Memoria Aleatoria presente errores acotados, es decir, si permitimos que exista una diferencia acotada entre φ y alguna submatriz Θ , entonces la probabilidad de encontrar Θ dentro de M aumenta. Estamos hablando entonces de patrones de información, dado que nuestro interés no se centra en una representación exacta de una estructura de información pero sí en una estructura fundamental que debe conservarse y que es significativa dentro de algún paradigma computacional. En la sección 5 demostramos experimentalmente cómo el introducir el concepto de patrón de información aumenta dramáticamente la probabilidad de encontrar dentro de M alguna Θ que conserve la estructura fundamental de una matriz φ .

Aunque el cálculo del tamaño de la matriz aleatoria para un tamaño específico de submatrices $m \times n$ permanece desconocido, nos proponemos: 1) Encontrar de manera experimental una relación entre los tamaños de las matrices, de tal manera que tengamos la certeza de que dado un tamaño de submatriz, será posible encontrar cualquier instancia de este tamaño dentro de la matriz aleatoria; 2) Estudiar el comportamiento del modelo cuando se pretende almacenar grandes cantidades de información y 3) Proponer el modelo como un paradigma efectivo y eficiente para sistemas neurocomputacionales.

2. TEOREMA DE RAMSEY.

En el campo de las matemáticas, existen numerosos teoremas que afirman, de manera general, que todo sistema de una cierta clase

contiene un subsistema con un grado de organización mayor que el sistema original¹.

Los llamados "Teoremas de tipo Ramsey" prueban esta afirmación tomando como objetos de análisis diferentes entes matemáticos: conjuntos y grafos (Ramsey)⁷, ecuaciones (Schur, Rado)^{8,9}, progresiones aritméticas (Van der Waerden)¹², secuencias finitas formadas de conjuntos finitos (Hales-Jewett)⁵, espacios vectoriales (Graham-Lib-Rothschild)³, etc. Estos teoremas conforman lo que se conoce de manera general como la Teoría de Ramsey, una subdisciplina dentro de las matemáticas discretas. La mayoría de estos teoremas afirman que un coloreado en r de cualquier estructura lo suficientemente grande contiene una subestructura monocromática de cierto tamaño. En términos de la teoría de grafos, si un grafo contiene suficientes vértices (un número dependiente de k), entonces debe contener o un conjunto completo o un conjunto independiente de vértices de tamaño k .

Resulta conveniente mencionar que algunos teoremas matemáticos como el de Bolzano-Weierstrass, que afirma que dentro de cualquier secuencia acotada de números complejos existe una subsecuencia convergente, entran dentro de la clase de teoremas mencionada en¹, pero no conforman parte de la Teoría de Ramsey.

Para dar una definición formal introducimos la siguiente notación.

$\mathbb{N}_+ = \{1, 2, \dots\}$ = los enteros positivos.

$[n] = \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}_+$ es un conjunto arbitrario de cardinalidad n .

$[A]^k = \{B: B \subset A, |B| = k\}$.

Un coloreado en r de un conjunto S es un mapeo

$$f: S \rightarrow [r]$$

Para $s \in S$, $f(s)$ se le denomina el color de s , y decimos que un conjunto $T \subseteq S$ es monocromático bajo f si $f(s)$ es constante en T , esto es

$$f(t) = r_i \quad \forall t \in T, T \subseteq S, i \text{ constante}$$

Dado cualquier coloreo en r de $[n]^2$, si existe i , $1 \leq i \leq r$, y un conjunto $T \subseteq [n]$, $|T| = l$, tal que $[T]^2$ es monocromático en i , entonces escribimos

$$n \rightarrow (l_1, \dots, l_r)$$

La función de Ramsey $R(l_1, \dots, l_r)$ denota el mínimo valor de n tal que la proposición anterior es cierta.

La generalización del caso anterior es cuando consideramos el coloreado en r de $[n]^k$, donde k es un entero arbitrario.

Definimos $n \rightarrow (l_1, \dots, l_r)^k$ si, para todo coloreado en r de $[n]^k$, existe i , $1 \leq i \leq r$, y un conjunto $T \subseteq [n]$, $|T| = l_i$, tal que $[T]^k$ es monocromático en i .

En este caso, la función de Ramsey para conjuntos de cardinalidad k se indica por R_k

$$R_k(l_1, \dots, l_r) = \min \{n_0 : \text{para } n \geq n_0, n \rightarrow (l_1, \dots, l_r)^k\}$$

El Teorema de Ramsey afirma que la función R_k está bien definida: esto es, para todo k, l_1, \dots, l_r , existe n_0 tal que para $n \geq n_0$ se cumple

$$n \rightarrow (l_1, \dots, l_r)^k$$

Se han desarrollado varias demostraciones de éste teorema. La demostración original a cargo de Frank P. Ramsey toma tanto el caso de un conjunto infinito como el de su análogo finito⁷.

El cálculo de los valores exactos de la función de Ramsey $R(k, l)$ para valores pequeños de k, l ha significado tremendos esfuerzos, sin embargo, hasta la fecha se conocen solamente los valores exactos y las cotas superiores e inferiores publicadas en⁶.

Nuestro interés se encuentra en probar experimentalmente la idea básica del Teorema de Ramsey en matrices discretas y utilizar esta poderosa idea como fundamento para un nuevo paradigma de almacenamiento de información en sistemas neurocomputacionales. Para ello debemos probar experimentalmente que en una matriz discreta M de un tamaño suficientemente grande (posiblemente generada de manera aleatoria) podemos encontrar cualquier matriz

discreta φ de un tamaño menor que M , con una probabilidad que aumenta conforme el tamaño de M es mayor.

$\rho(\varphi \subset M)$ aumenta si M aumenta en tamaño

3. EL MODELO FORMAL.

Definimos un Espacio de Memoria Aleatoria (EMA) como la tupla $\langle M, E, S, T, \Theta, \Gamma, \varepsilon \rangle$. M es una matriz bidimensional, E, T, Θ y Γ son conjuntos. S es un par ordenado y ε es un natural.

M es una matriz de tamaño $i \times j$ que contiene estructuras de la forma (v, r) en donde $v \in E$, r es una referencia a algún $\tau \in T$, E y T son conjuntos finitos y

$E \subset \mathbb{Z}$ (el conjunto de los números discretos)

Definimos el conjunto de valores base E' como

$$E' = \{e : e \in E \wedge |E'| = |E|/2\}$$

Los valores v son generados inicialmente de manera aleatoria y cumplen con la restricción

$$v \in E'$$

Definimos la matriz de valores M_v como aquella que se obtiene al eliminar el elemento r de cada una de las estructuras (v, r) de la matriz M . La matriz de referencias M_r es la que se obtiene al eliminar el elemento v de cada una de las estructuras (v, r) de la matriz M .

La correspondencia entre un elemento M_{vij} y uno M_{vji} es permanente, es decir, un elemento M_{vij} está relacionado en todo momento solamente con el elemento M_{vji} .

$$S = (m, n) \text{ donde } m, n \in \mathbb{Z}^+$$

T es un conjunto de transformaciones lineales τ que operan sobre M, M_v y M_r , produciendo los conjuntos de matrices M^t, M_v^t y M_r^t .

$$\begin{aligned} M^t &= \{\tau(M) : \tau \in T\} \\ M_v^t &= \{\tau(M_v) : \tau \in T\} \\ M_r^t &= \{\tau(M_r) : \tau \in T\} \end{aligned}$$

Θ es el conjunto de submatrices de tamaño $m \times n$ contenidas en las matrices $\tau(M_v)$ de M_v^t .

$$\Theta = \{\Theta_{xy} : \Theta_{xy} \subset \tau(M_v) \text{ para algún } \tau\}$$

donde cada elemento Θ_{xy} en Θ se encuentra formado por el conjunto P_{xy} de elementos

$$P_{xy} = \{P_{xy11}, P_{xy12}, \dots, P_{xyhk}, \dots, P_{xymn}\}$$

y donde cada P_{xyhk} es un valor v en una $\tau(M_v)$ con posición en (h, k) dado el origen relativo (x, y) .

Dado algún $\Theta_{x+a, y+b} \in \Theta$, donde $a, b \in \mathbb{Z}$, si se cumplen las condiciones $|a| < m$ y $|b| < n$, y sea

$$B = \Theta_{xy} \cap \Theta_{x+a, y+b}$$

entonces la siguiente proposición es válida:

$$B \neq \emptyset$$

Puede observarse que las submatrices Θ_{xy} y $\Theta_{x+a, y+b}$ contienen elementos P_{xyhk} en común dentro de alguna matriz $\tau(M_v)$. La cantidad de elementos compartida dentro de $\tau(M_v)$ por este par es

$$|B| = \{ \text{abs}(m - \text{abs}(a)) \} \wedge \{ \text{abs}(n - \text{abs}(b)) \}$$

donde $\text{abs}(x)$ es el valor absoluto de x .

El número de submatrices Θ_{xy} en M_v^t está dado por

$$c = [(i - m) + 1] [(j - n) + 1] t$$

donde t es el número de transformaciones lineales aplicables a M .

$$t = |T|$$

Un patrón de entrada φ es una matriz binaria de tamaño $m \times n$. Al aplicar las transformaciones lineales τ a la matriz M , se incrementa la probabilidad de ocurrencia de φ

$$\rho(\varphi \in \Theta)$$

La búsqueda de un patrón φ en el EMA es un mapeo del plano de entrada φ a un plano $\tau(M_v)$

para alguna τ , obteniendo una submatriz $\Theta_{xy} \in \Theta$, que no necesariamente es idéntica a φ , y el número de elementos en que difieren queda determinado por

$$\varepsilon(\varphi, \Theta_{xy}) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} \varphi(x+k, y+l) \Psi \Theta_{xy}(x+k, y+l) \quad (2m-1)^2$$

donde Ψ es un operador de equivalencia, que se define de la siguiente manera:

$$a \varphi b = \begin{cases} 0 & \text{si } aRb \\ 1 & \text{de otra manera} \end{cases} \quad a \in E', b \in E$$

La relación $R: E' \rightarrow E$ es reflexiva y mantiene una correspondencia 1 a 2.

Para que el patrón de entrada φ sea asignado a la submatriz Θ_{xy} , son condiciones necesarias

$$\varepsilon(\varphi, \Theta_{xy}) \in E' \quad \text{y} \quad \Theta_{xy} \in E'$$

debido a que al momento de asignarse, el valor v de Q_{xy11} es sustituido por

$$w \in E, \quad \forall R w, \quad v \neq w$$

y este elemento no podrá utilizarse para marcar algún otro patrón de entrada φ_r . Adicionalmente, al elemento r , con el que Θ_{xy11} forma una estructura (v,r) en M_i , le debe ser asignada una referencia a la transformación τ para la cual Θ_{xy} es una submatriz de $\tau(M_i)$.

Γ es el conjunto de patrones que se almacenan en el EMA dado un conjunto Θ de patrones de entrada

$$\Gamma = \{ \Theta_{xy} : (\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} \varphi(x+k, y+l) \Psi \Theta_{xy}(x+k, y+l)) \in E' \}$$

$\Theta_{xy} \in (E - E'), \Theta_{xy} \subset \tau(M_v)$ para algún $\tau \in T, \varphi \in \Theta$

El grado de superposición de un elemento M_{ij} , es decir, una estructura (v,r) con posición i, j en la matriz M , es el número de submatrices Θ_{xy}

que almacenan algún patrón de entrada φ con $\varepsilon(\varphi, \Theta_{xy}) < \varepsilon$ y que comparten al elemento M_{vij} de M_i . Para patrones de entrada φ con geometría cuadrada $m \times m$ el máximo grado de superposición queda determinado por

$$(2m-1)^2$$

Debido a que al almacenar un patrón, se "marca" un elemento (v,r) , el número máximo de patrones que se puede almacenar en un espacio de memoria aleatoria es $i \times j$, el tamaño de la matriz M .

4. IMPLEMENTACIÓN.

M es implementada como un vector de n Matrices (M_1, M_2, \dots, M_n) de tamaño $i \times j$. Dado que deseamos manejar patrones binarios de información, cada elemento de M_i es una unidad de memoria de 4 estados:

$$E = \{0, 1, 0^*, 1^*\} \quad \text{y} \quad E' = \{0, 1\}$$

El valor de n depende de el número de transformaciones τ definidas sobre M_i , M_j y M_k ($t \in T$). En nuestros experimentos decidimos utilizar dos conjuntos de transformaciones lineales. El primero consta de 16 transformaciones que se obtienen de la siguiente manera:

1. 4 diferentes rotaciones: 90, 180 y 270 grados.
2. A cada una de estas rotaciones, traslación en su eje horizontal.
3. A cada una de las 8 transformaciones anteriores, inversión de los valores lógicos de la matriz.

Dado que cada elemento de memoria puede codificar cuatro diferentes estados, un vector de dos elementos puede codificar estas dieciseis transformaciones. Decimos que

$$M_v = M_1 \\ M_r = (M_2, M_3)$$

y un elemento (una estructura) de M con posición i, j se define por

$$M_{ij} = (M_{1ij}, (M_{2ij}, M_{3ij}))$$

donde $v = M_{1ij}$ y $r = (M_{2ij}, M_{3ij})$.

El segundo conjunto incluye 48 transformaciones, 3 de las cuales llamamos básicas:

1. La matriz original.
2. Intercambiando pares de renglones.
3. Intercambiando pares de columnas.
4. A cada una de las tres anteriores, se le aplican las 16 transformaciones del primer conjunto.

En este caso, definimos cuatro matrices: M_1 , M_2 , M_3 y M_4 :

$$M_v = M_1$$

$$M_r = (M_2, M_3, M_4)$$

$$M_{ij} = (M_{1ij}, (M_{2ij}, M_{3ij}, M_{4ij}))$$

Tanto el tamaño $i \times j$ de M , el tamaño $m \times n$ de los patrones de entrada φ y el grado de error ε permitido en la búsqueda de patrones dentro de M_v quedan como parámetros para el análisis experimental. Sin embargo, en nuestros experimentos restringimos las dimensiones de M y m a espacios cuadrados, es decir, $i = j$ y $m = n$.

5. ANÁLISIS EXPERIMENTAL.

El primer experimento consistió en medir las frecuencias de ocurrencia de los elementos de un

conjunto de patrones de entrada generados de manera aleatoria. El objetivo es encontrar experimentalmente una relación entre el tamaño de la matriz M , el tamaño de los patrones φ y el grado de error permitido ε , de tal manera que tengamos la certeza de que cualquier patrón de entrada será encontrado dentro un Espacio de Memoria Aleatoria particular. Los resultados se muestran en las Tablas 1 y 2 para EMA's de 16 y 48 transformaciones respectivamente.

A continuación medimos una de las características más importantes del modelo: la superposición de información. Para ello generamos n de patrones de manera aleatoria, efectuamos la búsqueda y asignación de cada patrón y posteriormente medimos, para cada estructura (v,t) en M , cuántos patrones están ocupando dicha estructura (el grado de superposición). El valor de n debe ser tal que se logren encontrar todos los patrones dentro del EMA. Las Tablas 3 y 4 muestran el número de estructuras que presentan determinado grado de superposición dados un tamaño de EMA, un tamaño de patrón de entrada, un número n de patrones, y un grado de error ε particular. Estos resultados son los obtenidos como media de 50 repeticiones del experimento para EMA's de 16 transformaciones.

Tabla 1. Resultados experimentales de la frecuencia de ocurrencia de un patrón binario dentro de un EMA utilizando 16 transformaciones (promedios sobre 50 patrones).

Tamaño del Patrón	Grado de Error	Dimensión del EMA			
		120x120	300x300	480x480	960x960
3x3	0	437	2772	7126	28668
	1	4327	27766	71356	286715
	2	20023	127789	328388	1319594
4x4	0	3	21	54	223
	1	55	365	944	3799
	2	460	2961	7640	30607
	3	2336	14991	38754	155846
5x5	0	0	0	0	0
	1	0	1	3	9
	2	2	12	35	145
	3	16	111	282	1166
	4	96	639	1651	6639

Tabla 2. Resultados experimentales de la frecuencia de ocurrencia de un patrón binario dentro de un EMA utilizando 48 transformaciones (promedios sobre 50 patrones).

Tamaño del Patrón	Grado de Error	Dimensión del EMA			
		120x120	300x300	480x480	960x960
3x3	0	1307	8341	21445	86008
	1	12983	83264	214137	859308
	2	59928	383249	984917	3957367
4x4	0	10	65	166	673
	1	171	1097	2824	11338
	2	1394	8825	22867	91888
	3	7036	45029	116272	466911
5x5	0	0	0	0	2
	1	0	3	9	33
	2	5	38	107	430
	3	50	325	855	3461
	4	297	1923	4973	19963

Tabla 3. Resultados experimentales de superposición de información en Espacios de Memoria Aleatoria. Resultados para matrices de tamaño 120x120 con 16 transformaciones

Tamaño del Patrón	Grado de Error	Número de Patrones	Grados de Superposición										
			0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°
3x3	0	250	13108	707	321	181	61	18	4	0	0	0	0
		500	12503	740	437	298	213	133	58	17	1	0	0
		1000	11426	939	553	450	297	304	226	115	74	16	0
4x4	1	250	11306	2366	572	136	18	2	0	0	0	0	0
		500	9074	3445	1305	414	118	35	7	2	0	0	0
5x5	2	1000	6571	3676	1941	1144	591	293	122	48	13	1	0
		250	10101	3335	845	91	8	0	0	0	0	0	0
		500	6690	5070	2006	545	87	2	0	0	0	0	0
		1000	3417	4705	3456	1822	733	210	42	12	3	0	0

Para dar una mejor idea de qué manera se lleva a cabo físicamente la superposición de información en los Espacios de Memoria Aleatoria, obsérvense las Figuras 2, y 3. Estas figuras son matrices que representan los grados de superposición alcanzados en los elementos de un EMA experimental de 80x80, el cual almace-

na patrones de dimensión 3x3 sin error permitido, esto es $e = 0$. Cada color codifica un grado de superposición diferente. De esta manera podemos observar la evolución de un EMA respecto a la perspectiva de la superposición de información.

Tabla 4. Resultados experimentales de superposición de información en Espacios de Memoria Aleatoria. Resultados para matrices de tamaño 300x300 con 16 transformaciones

Tamaño del Patrón	Grado de Error	Número de Patrones	Grados de Superposición										
			0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°
3x3	0	500	87668	1075	660	363	171	48	13	2	0	0	0
		1000	86893	986	578	533	341	321	203	96	41	8	0
		2000	85335	992	643	755	498	460	550	321	276	150	0
4x4	1	500	84458	3805	1226	354	111	39	7	0	0	0	0
		1000	81650	4207	2090	1099	586	261	83	23	1	0	0
		2000	78251	4366	2371	1658	1259	850	558	376	185	97	21
5x5	2	500	78338	10851	784	27	0	0	0	0	0	0	0
		1000	68467	18443	2744	3165	31	0	0	0	0	0	0
		2000	52005	28124	8016	1610	215	26	4	0	0	0	0

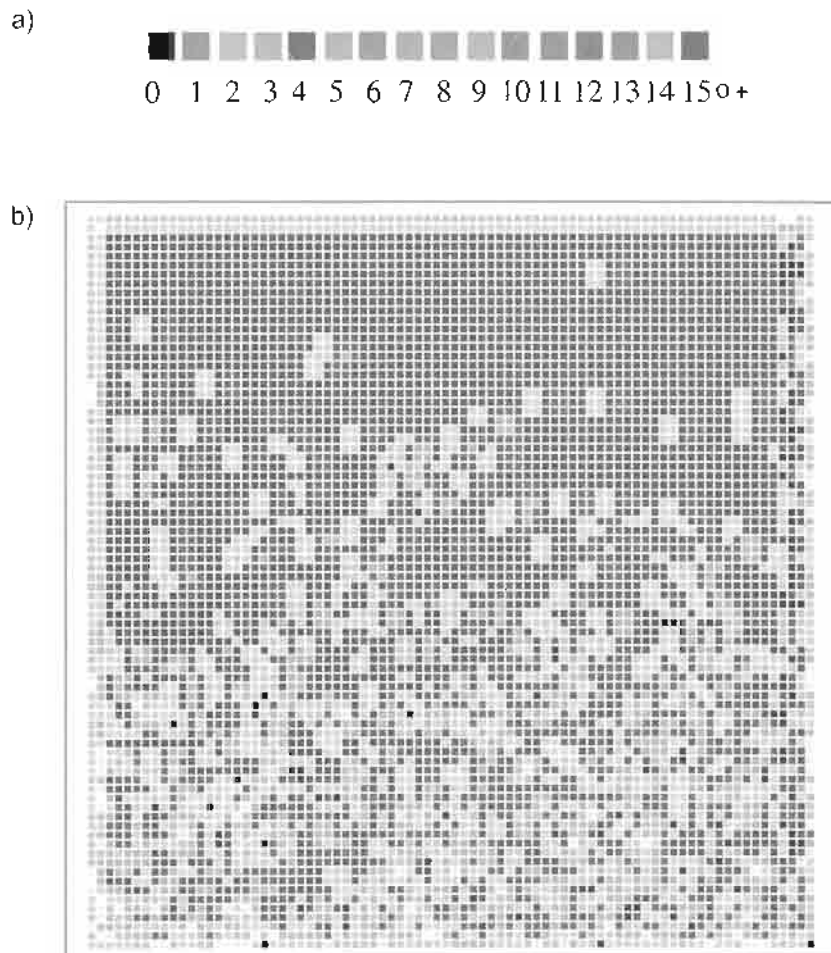


Figura 2. a) Código de colores para las figuras 2 y 3. b) Visualización de superposición de información para un EMA de 80x80 y 4000 patrones de tamaño 3x3.

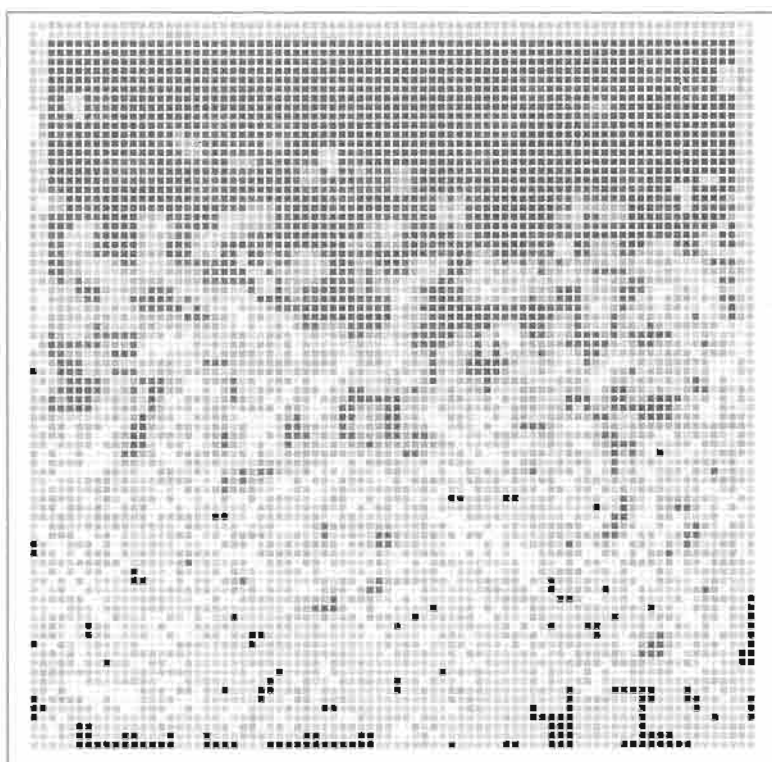


Figura 3. Visualización de superposición de información para un EMA de 80x80 y 6000 patrones de tamaño 3x3. El código de colores se observa en la Figura 2.

Tabla 5. Resultados experimentales de superposición de información en Espacios de Memoria Aleatoria. Resultados para matrices de tamaño 120x120 con 16 transformaciones y número de patrones cercano a la capacidad máxima de almacenamiento.

Tamaño del Patrón	Grado de Error	Número de Patrones	Grados de Superposición										
			0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°
3x3	0	500	87668	1075	660	363	171	48	13	2	0	0	0
		1000	86893	986	578	533	341	321	203	96	41	8	0
		2000	85335	992	643	755	498	460	550	321	276	150	0
4x4	1	500	84458	3805	1226	354	111	39	7	0	0	0	0
		1000	81650	4207	2090	1099	586	261	83	23	1	0	0
		2000	78251	4366	2371	1658	1259	850	558	376	185	97	21
5x5	2	500	78338	10851	784	27	0	0	0	0	0	0	0
		1000	68467	18443	2744	3165	31	0	0	0	0	0	0
		2000	52005	28124	8016	1610	215	26	4	0	0	0	0

Cont. Tabla 5.

Tamaño del Patrón	Grado de Error	Número de Patrones	Grados de Superposición										
			0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°
3x3	0	500	87668	1075	660	363	171	48	13	2	0	0	0
		1000	86893	986	578	533	341	321	203	96	41	8	0
		2000	85335	992	643	755	498	460	550	321	276	150	0
4x4	1	500	84458	3805	1226	354	111	39	7	0	0	0	0
		1000	81650	4207	2090	1099	586	261	83	23	1	0	0
		2000	78251	4366	2371	1658	1259	850	558	376	185	97	21
5x5	2	500	78338	10851	784	27	0	0	0	0	0	0	0
		1000	68467	18443	2744	3165	31	0	0	0	0	0	0
		2000	52005	28124	8016	1610	215	26	4	0	0	0	0

El experimento realizado para la obtención de las Figuras 2 y 3 sugiere que un EMA puede almacenar muchos más patrones de entrada que los utilizados para generar las Tablas 3 y 4. Por ello realizamos un último experimento para encontrar los mayores niveles de superposición alcanzados cuando se genera un gran número de patrones, número cercano a la capacidad máxima de almacenamiento del EMA. La Tabla 5 muestra los resultados obtenidos para un EMA de 120x120. Se utilizan únicamente patrones de tamaño 3x3 y 4x4, debido a que no es posible encontrar todos los patrones generados cuando su tamaño es 5x5.

6. INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS.

En las Tablas 2 y 3 podemos observar como la probabilidad de encontrar un patrón de entrada dentro de un EMA de tamaño particular aumenta de manera directamente proporcional al Tamaño del EMA y el grado de error permitido e inversamente proporcional al tamaño del patrón de entrada.

Las Tablas 3, 4 y 5 junto con las Figuras 2 y 3 demuestran en forma muy clara la superposición de información que tiene lugar en cada elemento de memoria física dentro de un EMA. Podemos observar cuantitativa y cualitativamente cómo un mismo elemento físico de almacenamiento puede utilizarse para almacenar más información de la que es capaz al utilizar un modelo convencional de memoria.

En la Sección 3 se afirma que el máximo grado de superposición posible cuando utilizamos patrones de entrada con geometría cuadrada $m \times m$ es $(2m - 1)^2$, es decir, teóricamente es posible que $(2m - 1)^2$ patrones estén utilizando un mismo elemento de memoria física. En la práctica vemos que el máximo grado de superposición es mucho menor, aún cuando el número de patrones almacenados es muy cercano a la capacidad máxima del EMA, esto es debido a que el cálculo de el grado máximo de superposición obedece a una distribución específica de los patrones en las diferentes transformaciones de las matrices y de la posición dentro de estas transformaciones, distribución que no tiene ninguna certeza de lograrse dada la naturaleza aleatoria de la matriz de valores.

Podemos efectuar un análisis de la capacidad teórica de almacenamiento de información en un EMA particular y comparar este valor con su análogo utilizando un modelo convencional de memoria. Esto es, en un EMA de $i \times i$ que almacena patrones binarios de entrada de tamaño $m \times m$ (utilizando memorias físicas de cuatro estados), teóricamente podemos almacenar $i \times i$ patrones, por lo tanto podemos almacenar $i^2 \times m^2$ bits, es decir, se pueden codificar

$$2^{i \times i \times m \times m}$$

combinaciones. Cuando el mismo espacio de memoria física se emplea de manera conven-

cional podemos almacenar $i \times i$ elementos de memoria de 4 estados, es decir $2 \times i^2$ bits, con los cuales se pueden codificar

$$2^{2 \times i^2}$$

combinaciones. La diferencia es clara, y puede observarse que se aumenta notablemente la capacidad de almacenamiento al aumentar el tamaño de el patrón de entrada. Si por ejemplo, el tamaño de los patrones de entrada aumenta a $(m+1) \times (m+1)$ la cantidad de combinaciones que se pueden obtener es

$$2^{i \times i \times (m+1) \times (m+1)}$$

lo que significa

$$2^{i \times i \times (2m+1)}$$

veces que la cantidad obtenida con patrones de tamaño $m \times m$.

Sin embargo, no es posible aumentar arbitrariamente el tamaño de los patrones de entrada, se tiene que lograr un balance entre la capacidad de almacenamiento y la probabilidad de encontrar dichos patrones.

7. CONCLUSIONES.

El modelo de Espacios de Memoria Aleatoria para el almacenamiento de información presenta varias características interesantes, entre las que se destacan su naturaleza primariamente aleatoria y la superposición de información. En la actualidad el paradigma de la computación cuántica emplea el concepto de superposición de estados utilizando entidades abstractas llamadas qbits como elemento fundamental de almacenamiento [13]. Aparentemente el empleo de una misma entidad física para representar diferentes cosas (estados, información, etc.) de manera simultánea es un concepto importante para el desarrollo de nuevos paradigmas computacionales.

La orientación hacia los procesos de almacenamiento y la sencilla manipulación de información son características que distinguen a los Espacios de Memoria Aleatoria de otros modelos de almacenamiento centrados en la repre-

sentación directa de información. Sin embargo, estos sencillos procesos y manipulaciones proporcionan una gran capacidad de almacenamiento dinámico de información.

8. REFERENCIAS.

1. Burkill, H. & Mirsky, L. *Motonicity*. J. Math. Anal. Appl. 1973.
2. Figueroa-Nazuno J., Mayol-Cuevas W. W., Sánchez-Guzmán R. A. & Vargas-Medina E. "Experimental Analysis of the Random Memory Space". *IEEE International Conference on Neural Networks. IEEE World Congress on Computational Intelligence*. Vol. 1. 1994.
3. Graham, R. L., Leeb, K. And Rothschild, B.L. "Ramsey's Theorem for a Class of Categories". *Adv. Math.*, 1972.
4. Graham, R. L., Rothschild, B. L. & Spencer, J. H. "Ramsey Theory". USA. *John Wiley and Sons Inc.* 1990.
5. Hales, A.W. and Jewett, R. i. "Regularity and Positional Games". *Transactions American Mathematical Society*. 1963.
6. Radziszowski, Stanislaw P. "Small Ramsey Numbers". *Electronic Journal of Combinatorics*. 2000.
7. Ramsey, F. P. "On a Problem of Formal Logic". *Proc. London Mathematicla Society*. 1930.
8. Schur, I. "Über die Kongruenz $xm + ym \equiv zm \pmod{p}$ ". *Jber. Deutsch. Math. Verein.* 1916.
9. Rado, R. "Verallgemeinerung Eines Satzes von van der Waerden mit Anwendungen auf ein Problem der Zahlentheorie". *Sonderausg. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Klasse.*, 1993.
10. Stern, August. "Matrix Logic". *Elsevier Science Publishers B.V.* 1988.
11. Villanueva-Rosales N. & Figueroa-Nazuno J. "Superposición de Información en la Memoria Aleatoria". *XL Congreso Nacional de Física*. Monterrey, N.L., México, 27-31 de octubre, 1997.
12. Van der Waerden, B. L. "Beweis einer Baudetschen Vermutung". *Nieuw Arch. Wisk.* 1927.
13. Milburn, G. J. "Schrödinger machines: the quantum technology reshaping everyday life". *W. H. Freeman & Company*. 1997.