Una propuesta para la valuación de opciones financieras:

La Fórmula de Primer Acercamiento

Act. Adolfo Martínez Huerta
Estudiante de Doctorado Universidad La Salle.
E-mail: <amartinh@banamex.com>

Recibido: Septiembre de 2001. Aceptado: Noviembre de 2001.

RESUMEN

Para coadyuvar a determinados estudiantes y participantes de derivados financieros de nuestro país, en el entendimiento de las principales fórmulas de valuación de opciones como la Black – Scholes o la Binomial, se presenta una fórmula de valuación, llamada de Primer Acercamiento, para cuya deducción se utilizan conocimientos básicos en finanzas y que bajo determinadas condiciones esta fórmula se puede considerar como un caso particular de la Fórmula Binomial.
Palabras claves: valuación, opciones, Fórmula de Primer Acercamiento, Fórmula Binomial.

ABSTRACT

In order to help some Mexican students and participants of financial derivatives to understand the main option valuation formulas, such as Black – Scholes and Binomial, this work presents a valuation formula named "Primer Acercamiento" (First Approach). Basic financial knowledge is used for the deduction of this formula and under certain circumstances it is a particular case of Binomial Formula.
Keywords: valuation, options, First Approach Formula, Binomial Formula.

1. INTRODUCCIÓN

El mercado de derivados en México está en su inicio, su principal objetivo radica en el manejo del riesgo financiero de una empresa o de una persona. Entre estos instrumentos, se espera que las opciones tengan un lugar especial por su gran versatilidad.

Con el fin de obtener el máximo beneficio de las opciones, es indispensable realizar una valuación de los mismos. Ésta puede realizarse a través de varias fórmulas, entre las que destacan la de *Black & Scholes*, cuyos autores, por su excelente trabajo se hicieron merecedores del Premio Nobel de Economía 1997, y la *Binomial*.

El problema con estas fórmulas, para algunos estudiantes y participantes en el medio financiero de nuestro país, radica en que la matemática empleada es superior a la que manejan, lo que en ocasiones provoca que dichas fórmulas se utilicen como una "caja negra", es decir, se toma el resultado como "dado", sin mayores cuestionamientos (aunque en ocasiones con reservas), sobre todo por la existencia de una gran cantidad de paquetes de computación; sin embargo, esto puede inhibir su deseo de conocer los principios de la valuación de las opciones.[1]

[1] Aquí el punto es que algún estudiante, con cierto potencial, puede decidir que la matemática utilizada en la valuación de opciones es tan compleja (ecuaciones diferenciales, proceso de Wiener, límites, etc.), que lo desaliente a conocer más, lo que para la cultura financiera – matemática de los estudiantes y participantes de nuestro país sería una tristeza, desde luego queda el punto de la motivación, pero si es posible hacer un acercamiento más amable, el suscrito no ve porqué no hacerlo

Artículo de Investigación

Por lo anterior, el principal objetivo de este artículo, es mostrar cómo deducir una fórmula para valuar una opción *Call* cuyo subyacente sea una acción, al que se le denominará de Primer Acercamiento,[2] que es sumamente accesible (y hasta cierto punto obvia) para la mayoría de los estudiantes, particularmente de finanzas, de nuestro país y a partir de ella mostrar como se puede relacionar con las fórmulas avanzadas de valuación de opciones antes comentadas. La idea es que se pueda comprender[3] satisfactoriamente lo que es una fórmula de valuación de opciones.

Para el buen entendimiento de este artículo, es necesario que el lector tenga conocimientos básicos de las opciones,[4] así como de matemáticas financieras (incluyendo la tasa de rendimiento continua), de álgebra elemental, de estadística descriptiva y del mercado de valores.

[2] La primera versión de la deducción de esta fórmula, a la que originalmente se le llamó "Fórmula discreta para valuar Warrants", la publicó el suscrito en el periódico *El Economista*, suplemento Fondos de Inversión, sep. 98, pp. 23-24, y posteriormente se hizo una reproducción del mismo en el *Boletín Informativo* de la Asociación Mexicana de Analistas Técnicos, nov. 98, pp. 6-16. En esa ocasión se le hizo notar al suscrito que, la Fórmula Binomial, y muchas otras más, también son discretas, por lo que el nombre original generaba confusión y se cambió al de Fórmula de Primer Acercamiento. Ademas había que aclarar ciertos detalles en la deduccion, los que se espera queden solventados en el presente artículo.

[3] Puede decirse que se entenderá una fórmula, cuando al modificársele algunos parámetros pueda deducirse (pronosticar) el cambio que se dará en el resultado de la misma, esto contrasta con el hecho de modificar el parámetro, ver el resultado y después tratar de deducir qué pasó, hecho que acontecería si se utiliza la fórmula en un paquete de computación (se dan las entradas y se dan salidas). Un ejemplo interesante y fácilmente comprobable, es pedir a un participante que explique por qué al aumentar la tasa de rendimiento libre de riesgo, aumenta el valor de la opción, cuando en principio la lógica financiera diría que debe bajar.

[4] Sobre todo en lo referente a su definición, su operación y a los factores que la afectan. Es importante hacer notar que en México, a la fecha, solamente se opera de manera formal, una modalidad de opción, que se conoce con el nombre de título opcional o *warrant*. Desde luego, los resultados de este artículo también se aplican a dichos títulos. Una propuesta de valuación del precio de un título opcional se publicó en esta misma revista: Pérez Elizalde y Gómez Ramírez, E., "Estimación del precio de un título opcional mediante una red neuronal artificial", *Rev Centro Inv (Méx)*, vol. 3, núm. 12, pp. 419-437, enero-junio de 1999.

En el artículo se supone que las opciones son europeas, que el subyacente es una acción que no reparte dividendos y que no existen costos de transacción.

2. La Fórmula de Primer Acercamiento (FPA)

Un estudiante de opciones se puede dar una idea de la valuación de una opción *Call*, y la manera en que la afectan ciertas variables, en particular el precio del bien subyacente, si sigue la forma de razonar de un inversionista en opciones a vencimiento, que las utiliza únicamente para fines de especulación[5] y cuya comparación sea con una inversión libre de riesgo, como puedan serlo los cetes.

Así un inversionista puede invertir a un plazo de t días una cantidad C en cetes, cuya tasa de rendimiento sea i, o bien puede invertir esa misma cantidad C en una opción *Call* a vencimiento.

En caso de que invierta en cetes, su monto a vencimiento es:

$$C\,(1 + it/360) \qquad \textit{(Ec. 1)}$$

Por lo tanto, lo que buscará el inversionista es que su inversión en una opción sea superior a esta cantidad, o para fines académicos, podemos decir que sea igual a dicha cantidad.

Si definimos a S como el precio de la acción a la fecha de inicio y a k como el incremento porcentual del precio de la acción a vencimiento, se deduce que el precio a vencimiento de la acción será:

$$S\,(1+ k) \qquad \textit{(Ec. 2)}$$

[5] Es decir, la opción puede utilizarse como cobertura y como especulación. La mayoría de los libros de opciones, y el presente artículo, utilizan este último acercamiento para evitar introducir "ruido" en la deducción; sin embargo, al ir avanzando en el conocimiento de las opciones, algunos lectores pueden llegar a confundirse (ahondar sobre esto está fuera de los límites de este artículo).

La ganancia de una opción *Call* europea a vencimiento es su valor intrínseco, que por definición será el valor mayor entre su precio a vencimiento menos su precio de ejercicio X y cero, es decir:

$$\text{Max}\ [\ S(1+k) - X\ ,\ 0\ ]$$

(Ec. 3)

Por el momento, si sólo se toman en cuenta los valores positivos, el valor intrínseco sería:

$$S\ (1 + k) - X$$

(Ec. 4)

Entonces, para que estén en equilibrio esta cantidad debe ser igual a la obtenida en cetes, es decir:

$$C\ (1+ it/360) = S(1+k) - X$$

(Ec. 5)

Despejando a C, tenemos la Fórmula de Primer Acercamiento (FPA):

$$C\ =\ \frac{S(1+k) - X}{(1=it/360)}$$

(Ec 6)

Para efectos académicos es conveniente presentar la FPA de la siguiente forma:

$$C\ = S\ \frac{(1+k)}{(1+it/360)}\ -\ X\ \frac{1}{(1+it/360)}$$

(Ec. 7)

La razón de esto es porque la Fórmula de Black–Scholes es la siguiente:

$$C = S\ N(d1) - X\ e^{-rT}\ N(d2)$$

(Ec. 8)

Definiéndose:

$$d1= \frac{\overline{\ln(S/X) + (r + v^2/2)T}}{v\ \sqrt{T}} \quad y \quad d2 = d1 - v\ \sqrt{T}$$

en dónde S y X se definen como antes, r es la tasa libre de riesgo de manera continua y, que para estos efectos, se define $r = \ln\ (1+i)$, T es el plazo a vencimiento como fracción de un año, N(d) = resultado de aplicar a "d" la distribución normal acumulada y v es la volatilidad del bien subyacente.

Y, en consecuencia, ambas fórmulas, tanto la Black–Scholes como la FPA, pueden representarse de forma general[6] como.

$$C = S\alpha - X\beta$$

(Ec. 9)

Expresado de otra forma, el valor de una opción *Call*, es la diferencia del precio actual del precio ponderado por un factor α menos el precio de ejercicio ponderado por un factor ß.

Estos factores, dados para la Fórmula de Black–Scholes están en función del plazo a vencimiento, la tasa de rendimiento continua libre de riesgo y la volatilidad del precio de la acción.

En el caso de la FPA, los factores están en función del plazo a vencimiento, la tasa de rendimiento libre de riesgo y el incremento a vencimiento del precio de la acción.

Por ejemplo, sea S = X = 35 30, t = 178 días, en cuyo caso T = 178/360 = 0 49, i = 17.33%, en cuyo caso r = ln(1+0.1733) = 15.98%, sea k = 16.95% y v = 0.43

Entonces para la FPA tenemos que:

$$C = 35.30\ \frac{(1+0.1695)}{(1+0.1733*178/360)}$$

$$-\ 35.30\ \frac{1}{(1+0\ 1733*178/360}\ = 5.51$$

[6] El suscrito ha visto varios libros que utilizan esta representación sintética de una fórmula para valuar opciones *Call*. La de este artículo es una versión modificada de la que aparece en el libro de Brown y Kritzman (ed), *Quantitative Methods for Financial Analysis*, Editorial CFA, 2ª. edición, 1989

Y, para la Fórmula Black-Scholes tenemos que:

$$d1 = \frac{\ln(35.30/35.30)+(0.1598 + 0.43^2/2)0.49}{v0.43\ \sqrt{0.49}} = 0.41$$

$$d2 = 0.41 - 0.43\ \sqrt{0.49} = 0.11$$

$$C = 35.30\ N(0.41) - 35.30\ e^{-0.1598 \cdot 0.49}\ N(0.11) = 5.51$$

Desde luego, en este caso se buscó que la k, esto es el incremento esperado en el precio de la acción a vencimiento, fuera el correspondiente a una volatilidad de 0.43 en el precio de la acción, razón por la cual producen el mismo resultado.

Es importante hacer notar que la FPA en sí está manejando un único escenario o estado de naturaleza, que se representa por k, razón por la que también puede llamarse Fórmula de Primer Acercamiento Puntual; sin embargo, puede extenderse y bajo ciertas condiciones puede inducirse a la Fórmula Binomial, lo que se verá en la siguiente sección.

Además, tal como está presentada la FPA puede no ser consistente con la *Call–Put parity*, por lo que de emplearse equivocadamente se es susceptible a ser arbitrado.

Como se ha comentado, el objetivo de la FPA es coadyuvar a determinados estudiantes e interesados en el tema, al entendimiento de las fórmulas de valuación más avanzadas y de ninguna manera las pretende sustituir.

3. La Fórmula de Primer Acercamiento y la Fórmula Binomial

Está claro que un único estado de la naturaleza, esto es, un único precio a vencimiento de la acción es una visión limitada para valuar un opción *Call*, de ahí que el siguiente paso sea buscar cómo extender los alcances de la FPA. Para efectos de este artículo únicamente se mostrará un camino que, partiendo de la FPA, nos permita llegar al caso particular de una fórmula más avanzada: la Fórmula Binomial de Dos Pasos *(Two-Step Binomial Tree)*, por lo que no es una demostración formal.

Como punto de partida tomemos una forma usual de razonar, que consiste en que en vez de tener un escenario, se pueden dar tres: el pesimista, el más medio y el optimista.

Cada estado de la naturaleza puede valuarse en forma independiente con la FPA, en cuyo caso tendríamos 3 valores de C, a los que podemos denominar como C_1, C_2 y C_3, es decir, cada C_h (para h=1,2,3) consistirá en el valor de una opción para cada uno de los escenarios comentados.

Con estos tres valores puede obtenerse un promedio ponderado por la probabilidad de ocurrencia de los mismos, a lo que se le denomina el criterio del *Valor Medio Esperado* (VME).[7]

Lo anterior se expresa algebráicamente como sigue:

$$VME = C_1q_1 + C_2q_2 + C_3q_3$$

(Ec. 10)

donde las C_h (para h=1,2,3) son el valor de la opción determinados por la FPA (Ec. 6) para un escenario en particular, y las q_h (para h=1,2,3) son la probabilidad de que ocurra ese escenario, por esta condición, se necesita que:

$$q_1 + q_2 + q_3 = 1$$

(Ec. 11)

[7] A este promedio, dentro de la Teoría de la Decisión, se le conoce con este nombre, pero dentro de la probabilidad y la estadística, se le conoce como la Esperanza de una Variable Aleatoria, o primer momento alrededor del origen; así, si a la misma la denotamos como x, entonces se define como:

$$E(x) = \Sigma\ x_h\ f(x_h)$$

En el mundo empresarial y financiero también se utiliza, y se le suele denominar como el Rendimiento Esperado de una Inversión, de igual forma se emplea en el mundo académico, aunque con otra interpretación; así, un profesor puede decidir que la nota final del curso podrá ser, por ejemplo, el 60% el examen final, el 30% los exámenes parciales y el 10% las tareas.

Si sustituimos el valor de las C_h tenemos que:

$$VME = \frac{S(1+k_1) - X}{(1+it/360)} q_1 + \frac{S(1+k_2) - X}{(1+it/360)} q_2 + \frac{S(1+k_3) - X}{(1+it/360)} q_3$$

(Ec. 12)

De lo anterior se aprecia que cada uno de los tres escenarios tiene el mismo valor de ejercicio X, el mismo precio actual del bien subyacente S, la misma tasa de interés i, el mismo plazo t, y la única diferencia se da en el valor de la k (lo que está representado por las distintas k_i), es decir, lo que cambia es el escenario, en función del incremento porcentual esperado a vencimiento del bien subyacente.

Si se factoriza se tiene que:

$$VME = (1+it/360)^{-1} [(S(1+k_1) - X) q_1 + (S(1+k_2) - X) q_2 + (S(1+k_3) - X) q_3]$$

(Ec. 13)

Conoceremos la fórmula anterior con el nombre de el Valor Medio Esperado de la Fórmula de Primer Acercamiento (VFPA).

El valor $(1+it/360)^{-1}$ corresponde al factor de descuento utilizando una tasa de rendimiento i, si en vez de utilizar esta tasa se utiliza su equivalente continua, es decir:

$$r = \ln (1+ i)$$

Entonces este factor de descuento se transforma en:

$$e^{-rt/360}$$

Sustituyendo este valor en la VFPA, se tiene que la fórmula se convierte en.

$$VME = e^{-rt/360} [(S(1+k_1) - X) q_1 + (S(1+k_2) - X) q_2 + (S(1+k_3) - X) q_3]$$

(Ec. 14)

Se necesita, en todo momento, que los distintos valores $S(1+k_h) - X$ (para h=1,2,3) no sean negativos, por lo tanto, si esta condición en la fórmula se escribe de manera explícita, quedaría:

$$VME=e^{-rt/360}[Max\{(S(1+k^1)-X),0\}q^1+ Max\{(S(1+k_2)- X),0\}q2 + Max((S(1+k3) - X),0\}q_3]$$

(Ec. 15)

Si se define:

$$f_{uu} = Max\{(S(1+k_1) - X), 0\}$$
$$f_{ud} = Max\{(S(1+k_2) - X), 0\}$$
$$f_{dd} = Max\{(S(1+k_3) - X), 0\}$$

Y sustituyéndola se tiene que:

$$VME = e^{-rt/360} [f_{uu} q_1 + f_{ud}q_2 + f_{dd}q_3]$$

(Ec. 16)

Si se hace que:

$$t/360 = 2DT$$

Y se invierte el orden dentro de los corchetes, entonces:

$$VME = e^{-2rDT} [q^1f_{uu} + q_2f_{ud} + q_3f_{dd}]$$

(Ec. 17)

Si se definen las probabilidades de la siguiente manera:

$$q_1 = p^2$$
$$q_2 = 2p(1-p)$$
$$q_3 = (1-p)^2$$

En donde puede observarse que la suma de las q_h (para h=1,2,3) es igual a la unidad, y si además se sustituye VME por f, finalmente se tiene que:

$$f = e^{-2rDT} [p^2 f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd}]$$

(Ec. 18)

Esta fórmula, es la Fórmula Binomial, correspondiente a la de Dos Pasos *(Two-Step Binomial Tree)*, y aparece en la página 202 del libro de Hull, *Options, Futures and Other Derviates*, 3ª. edición[8], se permite señalar que se buscó respetar, en lo posible, la notación original de dicho autor, y que la p tiene una metodologia particular de cálculo, que en este artículo no se explica.

Es importante hacer notar que el desarrollo original de la Fórmula Binomial la hicieron Cox, Ross y Rubinstein,[9] pero se decidió utilizar la versión de Hull, debido a que es una publicación más reciente, a que tiene un acercamiento más didáctico y, además, porque este libro y esta edición son una de las cuatro lecturas sugeridas por la Real Academia Sueca de Ciencias,[10] cuando dio información relativa al otorgamiento del Premio Nobel de Economía 1997 a los profesores Robert C. Merton y Myron S. Scholes, por su contribución en el desarrollo de la fórmula para valuar opciones, mejor conocida como Black & Scholes.

4. Una ilustracion

Para ilustrar las fórmulas anteriores, emplearemos el mismo ejemplo utilizado en libro de Hull,[11] cuando ejemplifica la Fórmula Binomial de dos pasos, antes comentada.

Calcularemos el valor de una opción *Call* referida a una acción, el precio de ejercicio es de 21, el plazo de vencimiento es de 6 meses y la tasa libre de riesgo es de 12% continua anual. El precio de una acción tiene un valor actual de 20, y puede subir, en el primer trimestre, 10% con una probabilidad de 0.6523 o bajar 10% con una probabilidad de 0.3477, esto se repite para el siguiente trimestre.

Lo anterior significa que 6 meses después, el precio de la acción puede tener solamente 3 valores:

1) 24.2, en cuyo caso el valor intrínseco f_{uu}= 3.2
2) 19.8, en cuyo caso el valor intrínseco f_{ud}= 0.0, y
3) 16.2, cuyo valor intrínseco es f_{dd}=0.0

Con esto se tiene que:

$$f = e^{-(0.12)(0.5)}[(0.6523)^2 (3.2) + 2(0.6523)(0.3477)(0) + (0.3477)^2 (0)]$$

$$f = 1.2823$$

Para utilizar la VFPA, requerimos construir los escenarios que esperamos puedan darse a vencimiento, y que para este ejemplo serían el pesimista, el medio y el optimista y, posteriormente, asociarles a cada uno de ellos una probabilidad.

Tal como está planteada la FPA y en consecuencia la VFPA, tanto los estados de la naturaleza como las probabilidades asociadas se hacen de acuerdo con el criterio del tomador de decisiones; sin embargo, esta flexibilidad podría ocasionar algunas inconsistencias (y en un momento dado ser arbitrado).

Por ello, para efectos de esta ilustración buscaremos ser congruentes con la Fórmula Binomial de dos pasos; en consecuencia, los escenarios serían: el pesimista cuando el precio de la acción sea de 24.2, lo que significa un incremento a vencimiento del 21% (con respecto a su precio actual de 20), la probabilidad de ocurrencia asociada a este escenario es de 0.4255; el medio seria cuando el precio de la acción sea de 19.8, que significa un decremento del 1%, la probabilidad asociada es 0.4536; y el optimista, cuando sea de 16.2, esto es un decremento del 19%, con probabilidad asociada de 0.1209.[12]

---

[8] Hull, John C., *Options, Futures and Other Derivatives*, Prentice Hall, 3ª. edición, 1997.

[9] Cox, Ross and Rubinstein. "Options Pricing. A Simplified Approach", Journal of Financial Economics, September 1979, pp. 229-263.

[10] [En línea] Disponible en: http://www.nobel.se/economics/-laureates/1997/press.html, agosto de 2001

[11] Hull, *op. cit.*

[12] Evidentemente los precios corresponden a los mostrados en la fórmula binomial, en tanto las probabilidades se determinaron así: pesimista (0.3477)(0.3477) = 0.1209, probable 2(0.3477)(0.6523) = 0.4536 y optimista (0.6523)(0.6523) = 0.4255

En el cuadro anexo mostraremos gráficamente la distribución de probabilidad utilizada. Esto es, decimos que a 180 días se espera que el incremento del precio de la acción sea del 21%, con una probabilidad del 42.55%; de menos 1% con una probabilidad del 45.36%; y, de menos 19% con una probabilidad del 12.09% respectivamente.

Con estas consideraciones, el valor de la opción sería el resultado de:

$$VFPA = \frac{[(20(1+0.21) - 21)(0.4255) + (20(1-0.01) - 21)(0.4536) + (20(1-0.19) - 21)(0.1209)]}{(1+0.1237*180/360)}$$

Dado que los 2 últimos valores del numerador son cero (ya que por definición de opción, al vencimiento se toma su valor intrínseco, y éste sólo puede ser positivo), tenemos que el resultado es:

$$VFPA = 1.2823$$

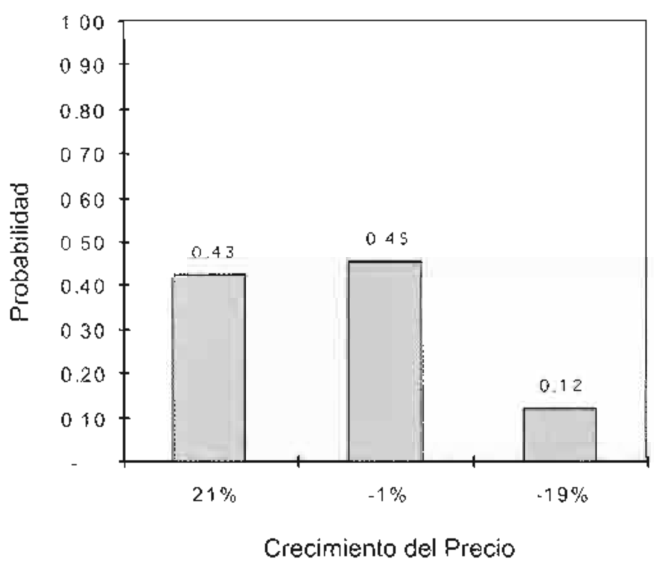
Desde luego el resultado es el mismo, toda vez que, como se mencionó, se utilizan los mismos datos para el comportamiento del precio de la acción, y la tasa de rendimiento que se emplea es la equivalente a la tasa de rendimiento continua del 12%.

5. Conclusión

Para algunos estudiantes y participantes en el medio financiero, la FPA puede utilizarse para coadyuvar en el entendimiento de fórmulas más avanzadas de valuación de una opción *Call*, toda vez que puede considerarse como un caso particular de la Fórmula Binomial, y que la deducción de la FPA es bastante sencilla.

Además, y toda vez que en límite la Fórmula Binomial se convierte en la Fórmula de Black–Scholes,[13] pueden realizarse otros estudios apoyados en la FPA, que permitirían el análisis de las opciones con un punto de vista complementario al que se ve en los libros, usualmente empleados en nuestro país, para la enseñanza de opciones.

Tabla 1. Distribución de Probabilidad asociada para el incremento a vencimiento del precio de una acción a 180 días



[13] La demostración la realizaron precisamente Cox, Ross & Rubinstein, 1979, *op. cit.*