

Concepciones Matemáticas de los Docentes de Primaria en relación con la Fracción como Razón y como Operador Multiplicativo¹

Marcela Luelmo Livas
Escuela de Ciencias de la Educación
Universidad La Salle
luelmom@yahoo.com , luelmom@hotmail.com

RESUMEN

Las matemáticas han presentado desde su existencia en el currículo oficial, una diversidad de problemas, tanto de enseñanza como de aprendizaje. Uno de los contenidos centrales de esta materia, son las fracciones, contenido complejo que presenta muchas más dificultades que otros. Este estudio hace un análisis de la enseñanza de ese contenido a partir de una de las teorías más actuales que rigen a la enseñanza de las matemáticas. La teoría de los campos conceptuales, plantea primordialmente, que una estructura matemática puede adquirir diferentes significados de acuerdo al contexto en el que se utilice, además, considera que para tener un conocimiento adecuado de dicha estructura es necesario conocer todos y cada uno de los significados que puede adquirir. En el caso de la fracción, los significados son cuatro: como medida, como cociente, como razón y como operador multiplicativo; siendo estos dos últimos los más difíciles de adquirir.

Esta investigación se centra en el estudio de los dos significados más difíciles, así como en los docentes, uno de los actores principales del proceso de enseñanza y de aprendizaje.

Al analizar los datos, se encontró, a grandes rasgos, que los docentes no han construido estos dos significados de la fracción, por lo que su conocimiento de ésta es incompleto y la enseñanza que puedan dar de la misma será deficiente, con lo que se determinaron las implicaciones educativas de los resultados encontrados para los alumnos de primaria.

ABSTRACT

Mathematics have shown, since their existence in the official circle, diverse problems related to both learning and teaching. One of the core contents in this subject are fractions, complex content presenting much more difficulties than others. This paper analyzes the teaching of such content based on one of the most current theories that rule math teaching. Conceptual fields theory states basically that a mathematical structure may acquire various meanings according to the context where it's utilized, besides, considers that in order to acquire an adequate knowledge of such structure it is necessary to know all and each of the meanings it may acquire.

This research is focused in studying the two most difficult meanings, as well as in teachers, one of the main performers of the process of teaching and learning.

¹ Trabajo ganador de la Medalla "Hno. Salvador González 2004", Área C. Educación y Humanidades, categoría Licenciatura Avanzada, XI Jornadas de Investigación, Universidad La Salle, Abril 2004.

While analyzing the data we found, in general terms, that the teachers have not built these two meanings of the fraction, making the knowledge incomplete and causing deficiencies in the teaching of fractions. Based on that the educational implications were determined for the elementary school student.

INTRODUCCIÓN

La matemática, es quizá una de las ciencias más antiguas debido a que ésta surgió por una necesidad del hombre.

La historia de la matemática en general, indica que los métodos y las formulaciones intuitivas preceden a la matemática exacta y formalizada. Es decir, los matemáticos utilizan pruebas para comprobar si sus ideas intuitivas o informales son lógicamente coherentes o no, así como su posible aplicación a un caso o a varios.

La matemática se encuentra en permanente evolución con lo anterior se puede afirmar que nuestro sistema numérico es el resultado de miles de años de perfeccionamiento y surgimiento de nuevas ideas.

Tradicionalmente, la enseñanza de la matemática se centraba en signos matemáticos y reglas para combinarlos, con la intención de desarrollar la capacidad para resolver problemas matemáticos, enseñando primero los algoritmos. Durante la enseñanza, el niño aprende a identificar las palabras claves para saber qué cuenta aplicar. Se concebía al conocimiento matemático como un acto de fe, sin vinculación a la vida cotidiana.

Actualmente, la concepción de la enseñanza de la matemática ha cambiado, siendo el principal cambio la introducción de una nueva metodología de enseñanza.

Los planes y programas de la Secretaría de Educación Pública, de 1993, se basan en la recuperación del sentido de la matemática. El objetivo de la enseñanza de las matemáticas es: "Que los alumnos se interesen y encuentren significado y funcionalidad en el conocimiento matemático, que lo valoren y hagan de él un instrumento que les ayude a reconocer, plantear y resolver problemas presentados en diversos contextos de su interés" (27:52).

Las fracciones representan para los alumnos un problema de aprendizaje, entonces, para los maestros será un problema de enseñanza; al considerar al aprendizaje como una cuestión social, el docente tendrá un papel determinante, ya que facilitará o no la construcción del conocimiento en los niños.

Con todo lo anterior y considerando que las ciencias de la educación son las disciplinas que analizan bajo todos los ángulos el hecho de la educación, aumenta la preocupación en relación con las matemáticas y su enseñanza, siendo éstas una parte fundamental dentro del Sistema Educativo Nacional. Para la realización de este estudio, se decidió analizar uno de los actores del proceso de enseñanza y de aprendizaje, los docentes, quienes representan un papel primordial y con grandes implicaciones en dichos procesos. Es con todo esto, que surge la siguiente pregunta de investigación:

- ¿Cuáles son las concepciones matemáticas de los docentes de primaria² acerca de la fracción como operador multiplicativo y como razón?

Para poder complementar mejor la investigación, surgieron las siguientes preguntas específicas:

- ¿Cuál es la concepción actual de la enseñanza de las matemáticas?

² Esta investigación se realizó en una escuela primaria pública del Distrito Federal.

- ¿Cuáles son las concepciones matemáticas de los docentes en torno a la enseñanza de las fracciones?
- ¿Qué influencia tienen dichas concepciones en el proceso de aprendizaje de sus alumnos?

HIPÓTESIS

Los docentes de educación primaria logran resolver situaciones en las que está implicada la fracción como operador y como razón, pero no lo hacen de la manera convencional.

JUSTIFICACIÓN

La matemática es una ciencia muy compleja catalogada como de difícil enseñanza. Los docentes de las escuelas primarias tienen una gran tarea al enseñar matemática, ya que esto implica tener un amplio conocimiento y dominio en cuanto a contenidos, además de conocer las diferentes formas en las que éstos pueden presentarse en las aulas y las posibilidades cognitivas de sus alumnos, así como determinar la evaluación tomando en cuenta los aspectos anteriores.

Las concepciones que un docente tenga en relación con la disciplina y con los contenidos matemáticos específicos, determinará en gran medida su actuar dentro y fuera del aula. Es decir, el docente basará su trabajo didáctico en sus propios conocimientos y, también, en su vida cotidiana, ya que la matemática es un conocimiento que se utiliza en todas las ciencias y disciplinas, por lo tanto, está presente en casi todos los aspectos del actuar cotidiano.

Esta investigación se centró en las concepciones de los docentes en relación con la fracción como operador multiplicativo y como razón; dos de los cuatro significados que puede adquirir de acuerdo con el contexto y situación en que se utilice.

Nos parece de suma importancia que esta investigación se centre en uno de los contenidos básicos dentro de la Educación Primaria. Los resultados que de este estudio surjan servirán para mejorar la educación básica, siendo ésta a la que más gente tiene acceso, e incluso, siendo la única educación formal que algunas de estas personas tienen.

El tema elegido en esta investigación ha sido poco estudiado en nuestro país, por lo que los resultados aquí obtenidos sugieren ideas y recomendaciones para futuros estudios.

Además, se presentó la posibilidad de obtener resultados de carácter social, ya que es una investigación cuyos resultados pueden contribuir a la mejora del sistema educativo. Es decir, se pretende que esta investigación proporcione resultados que sirvan para la toma de decisiones, tanto en planes y programas de estudio, así como en material de apoyo y cursos de actualización docente.

Para los especialistas en psicopedagogía infantil, esta investigación ofrece la posibilidad de conocer parte del proceso de adquisición de la estructura fraccionaria, para que, con base en este conocimiento, puedan incidir de manera favorable en los niños que así lo requieran.

A un docente de primaria le ayudará a que, tomando como base los docentes aquí analizados, logre identificar sus propias capacidades y deficiencias en relación con el tema y así estudiar más y mejorar las que así lo requieran.

ESTRUCTURA DEL TRABAJO

En esta investigación se encontrará, en primer lugar, un marco teórico que da base a toda la investigación; éste se divide en dos apartados principalmente, "Los campos conceptuales", referido

a la parte matemática que sustenta este estudio, y “Las concepciones de los docentes”, dividido en dos tipos de concepciones: la matemática y la pedagógica.

El segundo capítulo (Trabajo de Campo) abarca toda la recolección de datos, incluyendo la hipótesis, el tipo de estudio, las variables, la delimitación de población y muestra, la elaboración del instrumento, el piloteo, la aplicación y la interpretación, así como un apartado denominado “Implicaciones educativas para el alumno de educación primaria”, en el que se recupera la influencia de los docentes en los alumnos, dentro de un proceso de enseñanza y de aprendizaje.

VARIABLES

- Fracción como operador multiplicativo.
- Fracción como razón.
- Solución convencional.

DEFINICIÓN CONCEPTUAL

- Fracción como operador multiplicativo: Mecanismos que mapean un conjunto (o región) multiplicativamente sobre otro conjunto. Los números fraccionarios, en este significado, son aquellos que delimitan un rango específico al hacer comparaciones entre conjuntos. Es decir, el operador es el número que da la relación entre dos números.
- Fracción como razón: Las comparaciones cuantitativas de dos cualidades. El comprender a la fracción como una razón permite comparar, numéricamente, dos cosas de diferente naturaleza.
- Solución convencional: La solución de cada uno de los problemas de la manera más eficaz y efectiva, utilizando los esquemas de solución adecuados.

POBLACIÓN Y MUESTRA

Nuestra población comprende a todos los docentes que trabajan en una escuela primaria pública del Distrito Federal, como maestros titulares de grupo, durante el ciclo escolar 2002 – 2003.

La muestra comprende a ocho de los maestros titulares de grupo de la escuela primaria, y es de tipo no probabilística, ya que la elección de los docentes dependió de su disponibilidad al momento de la aplicación.

INSTRUMENTO

El instrumento para la recolección de datos es un cuestionario que consta de 5 reactivos principalmente. Cada uno de éstos contiene 16 subreactivos, de los cuales 8 subreactivos (2 reactivos) pertenecen a la variable “Fracción como operador multiplicativo” y, los 8 restantes (3 reactivos), a la variable “Fracción como razón”.

APLICACIÓN

La aplicación se realizó con base en la disposición de cada uno de los docentes, así como en el tiempo que podían dedicar a la solución del cuestionario.

Se realizó durante tres visitas a la escuela, en las que se entregó individualmente el instrumento a los docentes, después de explicarles el objetivo de la investigación. Se les pidió que fueran comentando el proceso de solución de cada uno de los problemas. Se les hicieron preguntas como ¿Cómo lo resolvió? ¿Por qué lo resolvió así?

INTERPRETACIÓN

La interpretación de cada uno de los problemas se hizo con base en los niveles definidos por Hart (13) y por Kieren (16) para la fracción como razón y como operador multiplicativo respectivamente. Con lo anterior se elaboraron tablas para cada uno de los significados de la fracción estudiados.

Además, se analizó cada una de las respuestas dadas por los profesores, tomando en cuenta las explicaciones que ellos mismos dieron para poder caracterizar cada una de las concepciones. A continuación se definirá cada una de las concepciones que se tomarán en cuenta para esta interpretación:

Para los problemas que implican fracción como razón:

- OPERADOR ESCALAR. Llamaremos así al hecho de tomar como punto de partida los valores conocidos, duplicándolos, triplicándolos y/o sacándoles la mitad. En el caso de los reactivos 1*i*, 1*ii* y 1*iii* (ver anexo 2) las respuestas son correctas, ya que existe esa relación en el planteamiento del problema.
- RELACIÓN DISTRIBUTIVA. Consiste en la utilización de la propiedad distributiva al encontrar el valor de *x*; considerado como procedimiento de éxito.

En el reactivo 1*i* uno de los docentes mencionó: “*B* es el doble (de *C*), y *A* es lo de *B* + *C*”.

- ESCALAR TRABAJADO ADITIVAMENTE. Agrupamos aquí aquellos procedimientos en que se evidencia el uso de sumas iteradas para obtener el valor deseado. Se hace uso de los apoyos gráficos para determinar el valor que se sumará obteniendo la respuesta adecuada.

En el reactivo 1*iii*, uno de los docentes dividió la línea que representaba a *A* en tres partes iguales, anotando en cada una de las partes el número 3, y así pudo determinar la respuesta correspondiente para *B*.

- REGLA DE 3. Llamaremos así al uso de la relación cuaternaria, en este caso, ninguna de las cuatro cantidades es igual a la unidad, por lo que la solución hace llamado al uso de la conocida ‘regla de tres’, que lleva al éxito en la solución.
- VALOR UNITARIO. Consiste en la búsqueda del valor unitario, que se considera como dato indispensable para la solución del problema; una vez obtenido el valor unitario se aplica una multiplicación para encontrar el valor de la incógnita. Es un procedimiento de éxito, con excepción de un caso en que el procedimiento para encontrar la unidad fue erróneo, pero mencionó que estaba sacando el ‘valor unitario’.
- IGUALACIÓN DE FRACCIONES. Agrupamos aquí a la transformación de una relación de dos cantidades en fracción, utilizando la equivalencia de fracciones para igualar dos pares de relaciones.

En el reactivo 3*i* uno de los docentes escribió:

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{10} \quad ; \quad \frac{1.5}{5} = \frac{3}{10}$$

Anotando como resultado 1 parte de mercurio por 1.5 de estaño.

- ESTIMACIÓN CUALITATIVA. Consiste en establecer arbitrariamente el valor de la cantidad buscada respetando sólo las relaciones de los datos (más y menos). No se realiza una operación para comprobar el resultado anotado, y este es incorrecto al ser estimado.

En el reactivo 2*i* uno de los docentes escribió 5 mm., mientras mencionó: “si a *X* le dan 2 cm., debe de ser menos”.

- DOBLES Y MITADES. Procedimiento de fracaso, en el que el docente saca el doble o la mitad de uno de los datos y le asigna ese valor a la incógnita.

En el reactivo 3i uno de docentes mencionó “es el doble de cobre, entonces es el doble de estaño”, al tiempo que anotó ‘3 partes de mercurio por 6 de estaño’.

USO INCORRECTO DE DATOS. Llamaremos así al procedimiento de fracaso en el que el docente usa incorrectamente los datos, sin embargo, el algoritmo es aplicado correctamente.

En el reactivo 2i uno de los docentes anota:

$$25 - 2$$

$$15 - x$$

Encontrando así un dato no solicitado en el planteamiento del problema.

RELACIÓN INCOORDINADA DE DATOS. En este procedimiento se observan los intentos de los docentes por establecer una relación cuantitativa entre los datos del problema; saben que tienen que operar con los datos, pero no es para ellos claro cuál deben usar; hay una búsqueda azarosa de la operación y utilizan adiciones, multiplicaciones y divisiones; obteniendo un resultado diferente al solicitado.

RETOMA DATOS. Procedimiento de fracaso, en el que el docente asigna el valor de uno de los datos proporcionados en el planteamiento del problema a la incógnita solicitada.

SIN RESPUESTA. Agrupamos aquí a todos los casos en los que no aparece ningún registro en el instrumento, o se limitan a responder “no sé”, “no le entiendo”, etc.

Para los problemas que implican fracción como operador multiplicativo:

DIVISIÓN. Llamaremos así al uso del algoritmo de la división para la obtención de la respuesta correcta.

DIVISIONES Y MULTIPLICACIONES. Agrupamos aquí a todos los casos en los que se utilizó la combinación de división y multiplicación para obtener la respuesta correcta.

OPERADOR MULTIPLICATIVO. Procedimiento de éxito, en el que se utiliza una fracción como operador multiplicativo para obtener la respuesta.

VALOR UNITARIO. Procedimiento de éxito consistente en la búsqueda del valor unitario, que se considera como dato indispensable para la solución del problema; ya que se ha obtenido el valor unitario se aplica una multiplicación para encontrar el valor de la incógnita.

RELACIÓN INCOORDINADA DE DATOS. En este procedimiento se observan los intentos de los docentes por establecer una relación cuantitativa entre los datos del problema; saben que tienen que operar con los datos, pero no es para ellos claro cuál deben usar; hay una búsqueda azarosa de la operación y utilizan adiciones, multiplicaciones y divisiones; obteniendo un resultado diferente al solicitado.

ERROR EN EL ALGORITMO. Agrupamos aquí todos aquellos procedimientos en los que el fracaso se debe a un error en la realización de algún algoritmo.

En el reactivo 4ii uno de los docentes anotó: ‘ $106 \times 2 = 312$ ’.

USO INCORRECTO DE DATOS. Llamaremos así al procedimiento de fracaso en el que el docente usa incorrectamente los datos, resolviendo correctamente el algoritmo aplicado. Uno de los docentes, en el reactivo 4vi anotó ‘ $320 / 2 = 160$ ’.

SIN RESPUESTA. Agrupamos aquí a todos los casos en los que no aparece ningún registro en el instrumento, o se limitan a responder “no sé”, “no le entiendo”, etc.

RESULTADOS

Para el caso de los reactivos que implican fracción como operador multiplicativo, sólo el 10.9% tienen una respuesta adecuada con conciencia del uso de razones para resolverlos; el 53.1% de los reactivos tienen la respuesta adecuada pero sin tener conciencia del uso de razones para obtenerla. Además, el 15.6% de los reactivos tienen una respuesta inadecuada a los problemas planteados y el 20.3 % de intentaron resolverse

Los primeros reactivos (más sencillos de solucionar) presentan mayor índice de respuestas en el nivel 3, que implica una respuesta adecuada pero sin la conciencia del uso de razones para obtenerla. Sin embargo, los dos últimos reactivos considerados con mayor grado de dificultad en su procedimiento de solución, presentan un mayor número de respuestas ubicadas en el nivel 0, es decir, la mitad de los docentes que resolvieron el cuestionario no dieron una solución a los problemas planteados.

Lo anterior, nos da indicadores de la falta de conocimiento de los docentes de la fracción como estructura matemática, considerando la importancia de conceptualizar una estructura como la fracción mediante su uso en diferentes situaciones. Al analizar los resultados obtenidos por parte de los docentes se observa que las experiencias previas no han implicado a la fracción en este tipo de significado, ya que pueden resolver los problemas sencillos, pero no los complejos; además, los problemas sencillos los logran resolver, pero sin utilizar la forma canónica convencional de solución que implicaba cada uno de los reactivos, es decir, sin utilizar la fracción.

En total, sólo encontramos siete respuestas en el nivel 4 que implica la conciencia del uso de la fracción como razón, lo que equivale sólo a menos del 10% de las respuestas.

Los niveles 1 y 2, presentan menos del 10% del total de respuestas, lo que nos refuerza la preocupación de más del 20% de las respuestas en el nivel más bajo de todos, el 0.

Los docentes tienen un uso restringido de un procedimiento algorítmico, ya que lo encuentran aplicable y pertinente frente a algunos problemas, y no pertinente frente a otros, que pueden modelarse con el mismo algoritmo. Incluso podemos ver que dentro del mismo reactivo, resuelven algunos subreactivos de cierta manera y otros no. De ahí que podamos afirmar que los profesores no tienen claro el sentido de las operaciones y no se aventuran a usar algún procedimiento espontáneo sin establecer un isomorfismo con los procedimientos numéricos.

En los reactivos que implicaban fracción como razón, encontramos que dos de los maestros lograron resolver el 25% de los problemas en los que se implica la fracción como razón, dando una respuesta adecuada y manifestando la conciencia del uso de razones para obtenerla. Otros dos de los maestros lograron resolver el 12.5% de los problemas con conciencia del uso de razones; y los cuatro maestros restantes no lograron resolver ninguno de los reactivos con conciencia del uso de razones. Sin embargo, estos cuatro docentes lograron resolver sin conciencia del uso de razones el 25%, 62.5%, 62.5% y 75% de los reactivos en los que está implicada la fracción como razón. (S: no entiendo, ¿se debe repetir el 62.5%?)

En este caso, sólo encontramos a uno de los docentes con todas las respuestas proporcionadas adecuadas, el maestro 3, sin embargo, sólo un 25% de éstas se realizaron con conciencia del uso de razones para obtener la respuesta. Otros tres de los docentes lograron reunir el 75% de sus respuestas en los niveles 3 y 4, lo que implica soluciones adecuadas, aunque no todas utilizando la forma canónica convencional de solución. No obstante, es preocupante que la mitad de los maestros que resolvieron el cuestionario no logran dar ni una sola respuesta con conciencia del uso de razones, y es aún más preocupante que dos de ellos sólo logren tener 25% y 37.5% de los reactivos con una solución adecuada.

Con lo anterior, podemos ubicar a seis de los docentes estudiados en el nivel 3, que implica una respuesta adecuada sin la conciencia del uso de razones; este nivel no se considera muy

preocupante, empero, es necesario ayudar a cada uno de estos docentes a utilizar el procedimiento canónico convencional de solución, ya que se considera como el más efectivo y eficaz. Las implicaciones de esto se desarrollan en el apartado "Implicaciones Educativas".

Cabe recalcar que los dos docentes restantes se encuentran en niveles inferiores, lo que resulta preocupante debido a la gran cantidad de respuestas inadecuadas proporcionadas por cada uno.

Los docentes confirman su tendencia a utilizar procedimientos algorítmicos sin tener un conocimiento claro del sentido de la operación; algunos sólo pueden resolver problemas "tipo" y otros pueden plantear estrategias dentro del campo de la matemática intuitiva. En este punto podemos afirmar la falta de conocimientos claros en relación con los algoritmos, ya que los docentes obtuvieron las respuestas pero sin utilizar los procedimientos más efectivos y eficaces.

Decimos que algunos de los docentes sólo pueden resolver problemas "tipo", ya que al no decirles en el problema alguna palabra clave para determinar el algoritmo a aplicar, (por ejemplo en los problemas de resta decir 'perdió', 'le robaron', etc.) encontramos que algunos ni siquiera hacen el intento por resolver la situación planteada de alguna forma. Otros docentes plantean estrategias dentro del campo de la matemática intuitiva, es decir, con base en el contexto intentan aplicar un procedimiento que los lleve a la solución adecuada y no se basan en el uso de operaciones y reglas simbólicas sin tomar en cuenta el contexto.

Podemos afirmar, que los docentes no han construido el concepto de fracción, ya que según Vergnaud (30), los conceptos se construyen mediante la utilización de la estructura en diferentes situaciones o problemas, y tomando como base las respuestas de los docentes, éstos no logran utilizar a la fracción en todas las situaciones en las que puede aplicarse.

En cuanto a los posibles niveles de respuesta de la fracción como operador multiplicativo, el 50% de los docentes logra resolver adecuadamente el reactivo 4vi, que implicaba unidad, no unidad y composición en las fracciones, y el 62.5% logró resolver adecuadamente el reactivo 4vii, que implicaba lo mismo. El 12.5% de los docentes no logró resolver el reactivo 4i, siendo éste el más sencillo de la fracción como operador, y el 37.5% no logró resolver el reactivo 4vii, considerado como el más complejo del apartado.

Podemos observar que a medida que los reactivos se complejizan, las frecuencias en el nivel 0, más bajo, aumentan, para encontrar en el reactivo más complejo 3 respuestas ubicadas en este nivel.

Los dos últimos problemas fueron más complejos matemáticamente para los docentes, sin embargo lograron resolver el 50% y más de los reactivos adecuadamente, cuyas respuestas se ubicaban en el nivel máximo alcanzable en el uso de las fracciones como operador multiplicativo.

En esta tabla se refleja el mayor índice de aciertos en las respuestas de los docentes en relación con los reactivos que implican fracción como razón. Los primeros 6 niveles presentan un alto índice de respuestas en el nivel adecuado, incluso, tres de los reactivos alcanzan el 100% de respuestas en dicho nivel.

Teóricamente, el uso de fracciones como operadores multiplicativos es mucho más complejo que el uso de razones, sin embargo, comparando la tabla 1 y la tabla 3, podemos observar que en los docentes estudiados no es así, ya que se encuentran mucho mejor a nivel general en las respuestas de los reactivos que implican fracción como operador multiplicativo.

Lo anterior puede deberse a dos factores principalmente, en primer lugar, la presencia del tipo de problemas en los libros de texto gratuitos de la SEP por lo que los docentes tienen más familiaridad con los problemas que implican fracción como operador multiplicativo que como razón; en segundo lugar, se determinó que la dificultad de los problemas planteados para la fracción

como razón fue mayor que los del operador multiplicativo, lo anterior con base en la cercanía que podían tener los docentes con dichos problemas.

Además, hay que recordar lo afirmado por Hart (13) acerca de la fracción como razón, en donde recalca su dificultad, ya que ésta debe entenderse como una relación numérica entre dos entidades y no como una medida (número) ni como una acción (operación). Asimismo, el manejo mecánico de algoritmos restringidos a un significado, por parte de los docentes, limita su posibilidad para la aplicación de procedimientos algorítmicos adecuados. En otras palabras, los docentes no entienden a la fracción como razón como una relación numérica, sino que la entienden (no podemos afirmar que en todos los casos así sea) como un número e intentan realizar un procedimiento algorítmico con éste, dejando de lado la relación de los datos de la situación planteada.

En algunos casos, la comprensión de la relación entre los datos les permitió reconocer y utilizar el cálculo aritmético pertinente, en otros, aún cuando identifican dichas relaciones, no tienen la posibilidad de resolverlos con los mismos procedimientos aritméticos utilizados anteriormente. Se puede observar que el máximo alcanzado por tres de los maestros es del 100%, otros dos maestros logran resolver el 87.5% de los reactivos en el nivel máximo; un maestro logró resolver 75% y otro 62.5%. El nivel más bajo se presenta en uno de los maestros que sólo logra resolver el 50% de los reactivos con operador multiplicativo en el nivel máximo alcanzable por cada uno de ellos.

En la tabla realizada para la frecuencia y porcentaje de respuestas en el nivel máximo para la fracción como operador multiplicativo encontramos que podemos corroborar todo lo mencionado anteriormente, ya que aquí se visualiza más claramente el alto nivel de aciertos por parte de los docentes, el nivel mínimo alcanzado (sólo uno de los docentes) es del 50%, un porcentaje muy por encima de los 2 docentes ubicados en niveles inferiores al 3 en la solución de problemas que implican la fracción como razón, ya que éstos no logran dar respuestas adecuadas más que al 30% y 40% de los reactivos y, en el caso de la fracción como operador multiplicativo, estos docentes (2 y 8) alcanzan el 62.5% y el 50% respectivamente de respuestas en el nivel máximo alcanzable de cada uno de los reactivos.

Los docentes comprenden la definición de la fracción como operador multiplicativo que no se refiere a una medida, sino a una acción de transformación que opera sobre una medida y que tiene como característica fundamental la síntesis de dos operadores, uno que divide y otro que multiplica. En el caso de los docentes que fracasan, podemos afirmar que tienen una concepción de la fracción como una medida (siendo éste sólo uno de sus significados), ya que aún cuando sean capaces de reconocer la relación de proporcionalidad de los datos del problema planteado, no pueden aplicar una fracción como operador multiplicativo, debido a que su concepción de las fracciones no incluye este significado.

Streefland (28) afirma que el concepto de fracción es difícil, ya que generalmente existe un análisis defectuoso del concepto mismo, lo que se corrobora con los docentes aquí investigados; mismos que pueden resolver una situación que implica fracción como operador multiplicativo, pero no una que implica fracción como razón.

El concepto de fracción de nuestros docentes no se basa en una riqueza de los fenómenos sobre los que se aplica este concepto, ya que sus respuestas no nos dan indicadores de conocer diversas situaciones en las que pueden aplicar la fracción como procedimiento algorítmico de solución; por lo tanto, la forma en que los docentes lo incluyan en el proceso de enseñanza y de aprendizaje no poseerá el concepto de la fracción en su totalidad, sino sólo en alguno o algunos de sus significados.

Se realizaron, además, tablas incluyendo frecuencia y porcentaje de los procedimientos que caracterizamos, tanto de éxito como de fracaso, para cada uno de los reactivos.

Para el reactivo 1, encontramos un 79% de éxito en las respuestas otorgadas al reactivo 1, abordado en tres distintas modalidades (Operador Multiplicativo, Relación Distributiva y Escalar Trabajado Aditivamente), los profesores recurren al operador escalar, ya que su complejidad conceptual y relacional es más sencilla que del procedimiento canónico de resolución, que en este caso sería la Regla de 3.

Este dato de éxito coincide con los obtenidos por Vergnaud (29) con alumnos de secundaria, que muestra que el escalar es mejor comprendido y utilizado que el operador función o 'regla de tres'. Esto no quiere decir que los profesores no tengan la posibilidad de entender la 'regla de tres', simplemente, el dato muestra que usan con mayor frecuencia el operador escalar en este reactivo.

Encontramos un 20.7% de procedimientos de fracaso en general. De ellos, el 8.3% de los docentes no supo realmente qué operación realizar para resolver el problema (Relación incoordinada de datos), lo cual nos habla de su falta de familiaridad con este tipo de problemas, así como de la falta de comprensión del problema planteado.

El 4.1% de los docentes realizó una estimación cualitativa, es decir, con base en los datos proporcionados supo determinar que el resultado era mayor que o menor que otro dato, y prosiguió así a asignar un número a la incógnita sin realizar una operación para sustentar su respuesta.

Es preocupante que el 8.3% de los docentes haya fracasado en este reactivo utilizando el procedimiento "Dobles y mitades", ya que sólo proceden a sacar la mitad o el doble de uno de los datos sin comprender del todo el problema planteado. En el estudio realizado por Hart (13) con niños de 12 a 15 años de edad, encontró que los dobles y las mitades son los procedimientos más utilizados, al ser éstos dos aspectos los más fáciles de la razón.

En este reactivo, la fracción como razón era de tipo externo, ya que se refería a dos medidas de diferente dimensión, en este caso, anguilas y tiras de pescado, según lo explicado por Freudenthal (en 19).

En el caso del reactivo 2, encontramos un porcentaje de 66.5% de procedimientos de éxito. Una cifra menor en relación con el 79% del reactivo 1, lo cual nos evidencia que el reactivo 2 posee mayor complejidad que el reactivo 1, ya que el reactivo 1 implicaba el uso de las fracciones $1/2$ y $1/3$ para su solución, mientras que el reactivo 2 implicó el uso de las fracciones $2/3$ y $3/5$. Sin embargo, en este caso encontramos un 58.3% de docentes que utilizan el procedimiento canónico de resolución (Regla de 3). Lo anterior lo atribuimos al hecho de que las cantidades involucradas en este reactivo no favorecen una relación escalar entre ellas, ya que ésta sería de tipo fraccionaria; por lo que los profesores optan por trabajar con números enteros con la 'regla de tres'.

Al complejizarse el problema planteado (en relación con el reactivo 1, encontramos dos situaciones: el incremento en el porcentaje de fracaso (33.1%) y la proliferación o mayor variedad de procedimientos de este tipo, que en este caso fueron 5 diferentes (Valor Unitario, Estimación Cualitativa, Uso Incorrecto de Datos, Relación Incoordinada de Datos y Sin Respuesta).

Es importante recalcar que el 8.3% de los docentes no proporcionó una respuesta. Por primera vez los profesores son rebasados por la complejidad del problema y no se atreven siquiera a emitir una respuesta. Sobre el 12.5% que realizó un Estimación Cualitativa, existen evidencias de que algunos sí entendieron las relaciones entre los datos y su estimación fue muy aproximada, pero hay quienes dan resultados alejados al correcto y nos hace pensar que no relacionan los datos y tal vez por compromiso emitieron una respuesta. El 4.1% utilizó incorrectamente los datos proporcionados en el problema, causando una respuesta errónea.

El uso del valor unitario implica el uso de la fracción decimal, ya que era necesario dividir $2/25$; de ahí que sólo 2 profesores se aventuran por este procedimiento poco usual, ya que en general la experiencia más común es hacer la operación $25/2$, como lo hace un profesor que fracasa.

En este reactivo, el 4.1% no supo que operación realizar, sin embargo proporcionaron una respuesta azarosa, intentando solucionar el problema.

La premura de los docentes por encontrar el algoritmo a aplicar, hace que pierdan de vista las relaciones entre los datos del problema. Al relacionar el reactivo 1 con el reactivo 2, observamos un menor porcentaje de éxito en el segundo, ya que los docentes no analizan los datos y menos lo vinculan con el significado.

La mayor incidencia en este caso de la regla de tres, nos confirma lo encontrado por Beher (5) en cuanto a la falta de comprensión por parte de los estudiantes de este procedimiento algorítmico de solución, además, del hecho de que éste es frecuentemente utilizado por los estudiantes (y en este caso, por los docentes) para evitar el razonamiento proporcional, más bien que para facilitarlo. Esto se evidencia mayoritariamente en este reactivo, ya que la proporción implicada dentro de la situación no era tan sencilla como en el primer reactivo, que implicaba doble y triple.

Además, en este reactivo, pudimos corroborar lo encontrado por Hart (13) en su estudio en relación con el uso de números decimales; al implicar este reactivo una proporción más complicada que el reactivo 1, los docentes en muchos de los casos prefirieron realizar la división entre numerador y denominador y trabajar así con números decimales.

En el reactivo 3 encontramos sólo un 31.25% de procedimientos de éxito, un porcentaje sumamente preocupante en comparación con el 68.75% de los procedimientos de fracaso. Otra vez, las características del problema favorecen, sobre todo, el uso de la 'regla de tres', lo que se comprueba con el hecho de que es el procedimiento de éxito más utilizado; no así el operador escalar, ya que en este reactivo sería en octavos (relación de 3 a 8) y en tercios (relación de 10 a 15). En este reactivo, las cantidades en juego no son múltiplos entre sí, ni en la relación función (horizontal) ni en la relación escalar (vertical); este tipo de problemas corresponde a los de mayor dificultad, incluso, el procedimiento canónico cae del 79% de uso en el reactivo 2, al 25% en el reactivo 3.

En cuanto a los procedimientos de fracaso, encontramos 4 diferentes: Dobles y Mitades, Retoma Datos, Relación Incoordinada de Datos y Sin Respuesta. En éstos es preocupante que el mayor porcentaje de fracaso se encuentre en Relación Incoordinada de Datos y en Sin Respuesta, lo que nos habla de la falta de comprensión de la situación planteada por parte de los docentes, ya que aplican al azar un algoritmo o, simplemente, se declaran incompetentes y dejan la situación sin respuesta.

El 12.5% de los procedimientos fue Retoma Datos, ya que los docentes sólo anotaron uno de los datos en el lugar de la incógnita sin analizar más a fondo el planteamiento del problema; y un 6.25% le sacó el doble o la mitad a uno de los datos y le asignó ese valor a la incógnita solicitada.

Con lo anterior, podemos afirmar que el reactivo 3 implicaba una situación problemática mucho más compleja que las dos anteriores, por lo que las concepciones de los profesores en relación con la fracción como razón no les permitieron dar una respuesta adecuada, es decir, los esquemas utilizados en la mayoría de los casos no fueron ni efectivos ni eficaces.

En este reactivo, los docentes evidenciaron una falta de comprensión de las relaciones entre los datos, lo que no les permitió reconocer y utilizar el cálculo aritmético pertinente, aún cuando en los otros dos reactivos que implicaban fracción como razón sí lograron hacerlo. Podemos observar que hay un 83.9% de éxito en los procedimientos realizados por los profesores para resolver la situación problema del reactivo 4; por lo que los procedimientos de fracaso son sólo el 16% de las respuestas dadas.

En el reactivo 4, hay un 83.9% de éxito en los procedimientos realizados por los profesores para resolver la situación problema; por lo que los procedimientos de fracaso son sólo el 16% de las respuestas dadas.

En este caso se utilizaron dos procedimientos de éxito: "División" y "Divisiones y Multiplicaciones", lo anterior nos permite afirmar que los docentes han tenido contacto con situaciones similares y han sabido como darle la respuesta adecuada, por lo que los referentes que poseen al respecto son mucho más efectivos y eficaces que en el caso de las situaciones que implican fracción como razón. Es importante recalcar que en algunas situaciones las divisiones implicaban trabajar con decimales y los profesores evitaron este trabajo y se conformaron con un resultado muy próximo al correcto, lo que fue considerado como procedimientos de éxito.

Encontramos que como la operación canónica es el uso de una fracción como operador multiplicativo (la relación de n a m se encuentra multiplicando $\times m/n$), los docentes utilizan la composición de división y multiplicación, lo cual está implícito en el operador fraccionario, sin embargo, los profesores no parecen tener conciencia o concebir que trabajan con un operador fraccionario, sino con números enteros.

En cuanto a los procedimientos de fracaso, el índice más alto se encuentra en el "Uso incorrecto de datos" con un 10.7% lo cual puede deberse a la intención por parte de los maestros de resolver rápidamente el instrumento sin poner verdadera atención por hacerlo bien.

Sólo encontramos dos casos en el reactivo 4vi sin respuesta; este implicaba una situación más compleja que las anteriores, ya que requería el uso de una composición en la fracción del operador multiplicativo.

El hablar de un 16% de procedimientos de fracaso nos señala que al menos una quinta parte de los profesores no establecen la relación más básica de una relación proporcional que está al alcance de un niño de segundo grado de primaria, ésta es la relación de Dobles y Mitades implicada en la mayoría de los subreactivos del reactivo 4.

El reactivo 5 es mucho más fácil de analizar, ya que sólo implica el uso de una fracción como operador multiplicativo para dar solución a todo el problema, incluyendo los subreactivos.

En este reactivo, encontramos un 75% de procedimientos de éxito, en cambio, encontramos sólo un 25% de procedimientos de fracaso. En este caso es importante recalcar que el 62.5% resuelven esta situación utilizando un operador multiplicativo, lo que se considera como solución canónica convencional. Uno de los docentes recurre al procedimiento de "Valor Unitario", que se considera adecuado, ya que permite al docente determinar el valor de la incógnita aplicando una multiplicación al valor encontrado.

Sólo encontramos dos procedimientos de fracaso, el 25%, y en este caso, los dos docentes no comprendieron el problema planteado, en lugar de aplicar una proporción para aumentar el tamaño de la figura, le sumaron la cantidad que aumentó en el lado presentado.

Al analizar las tablas realizadas de frecuencia y porcentaje de los procedimientos de cada uno de los profesores para cada uno de los reactivos, hemos encontrado lo siguiente:

- Para los problemas que implican fracciones como razón, los profesores que tuvieron mejor desempeño fueron el número 1 y el número 3. Ellos manejan de manera firme las relaciones proporcionales por operador escalar, teniendo con éste un alto porcentaje de éxito (100% y 99.9 %). Posteriormente, encontramos al profesor número 5, quien utiliza un operador escalar en el reactivo 1, con un 100% de éxito, en el reactivo 2 con el mismo porcentaje utiliza la regla de tres, y en el reactivo 3 presenta fracaso con una relación incoordinada de datos. El profesor 7 utiliza operador escalar para el reactivo 1, valor unitario y regla de tres para el reactivo 2 (en ambos reactivos con 100% de éxito) y para el reactivo 3 no intenta siquiera dar una respuesta. El profesor número 6 utiliza operador escalar para el reactivo 1 con 100% de éxito, regla de tres para el reactivo 2 con 66.6% de éxito y el reactivo 3 lo deja sin respuesta. El profesor número 4 da indicadores de exprimir al máximo la eficiencia del escalar, ya que demuestra que

le saca la vuelta a la regla de tres con la igualación de fracciones y usa escasamente la regla de tres para el reactivo 2. El profesor 2 presenta un 33.3% de éxito escalar, un 66.6% de fracaso, pero un 66.6% de éxito en el operador función con el uso de la regla de 3 para el reactivo 2. Finalmente, el profesor número 8 sólo puede tratar proporcionalmente los problemas de relación escalar “doble”, la más sencilla, y fracasa para el resto de los problemas planteados.

- En el caso de los problemas que implican fracción como operador multiplicativo, los docentes se encuentran en la siguiente posición en cuanto al desempeño: los docentes 3, 7 y 5 tienen el mejor desempeño con un 100% de éxito en ambas situaciones, utilizando para el reactivo 4 Divisiones y Divisiones y Multiplicaciones, y para el reactivo 5 Operador Multiplicativo; el docente número 7 utiliza para el reactivo 5 el procedimiento de Valor Unitario para obtener la respuesta adecuada. El profesor número 1 y el número 4 tienen un 85.6% de éxito en el reactivo 4, con el uso de Divisiones y Divisiones y Multiplicaciones, y en el reactivo 5 tienen un 100% de éxito con el uso de Operador Multiplicativo como procedimiento. El profesor 6, tiene un 100% de éxito en el reactivo 5, pero un 71.3% de éxito en el reactivo 4. Posteriormente, el docente número 2 presenta un 71.3% de éxito en el reactivo 4, pero en el reactivo 5 un 100% de fracaso al utilizar una relación aditiva. Finalmente, el profesor 8, presenta sólo un 57% de éxito en el reactivo 4, y un 100% de fracaso en el reactivo 5.

Los resultados encontrados por cada uno de los maestros en los diferentes problemas (los que implican fracción como razón y los que implican fracción como operador multiplicativo), nos habla de un desempeño más o menos general de cada uno de los docentes, ya que los resultados son, hasta cierto punto, consistentes en ambos problemas.

En las tablas 8 y 9 encontramos una relación entre los niveles propuestos por los autores que han desarrollado investigaciones para la fracción como razón y como operador multiplicativo, Hart (13) y Kieren (16) respectivamente, y las concepciones utilizadas para este estudio. Encontramos una sorprendente coincidencia entre los niveles propuestos por Hart (13) y las concepciones propuestas para este estudio. Hart (13) nos habla de la toma de conciencia para dar solución a los problemas que implican fracción como razón; Vergnaud (29) nos habla de dos clases de conciencia: “cuando el vínculo entre relaciones comprobadas y reglas sea explícito en el nivel de la conciencia del sujeto, sin estar sin embargo lógicamente justificado, y cuando el vínculo pueda ser explicado por el sujeto”. Con lo anterior, podemos recalcar la dificultad de determinar si la respuesta es conciente o no lo es.

En el caso de los reactivos que implican fracción como operador multiplicativo, encontramos también una coincidencia entre ambas propuestas. En este caso, creemos que la conciencia del uso de fracciones como operador multiplicativo es escasa, ya que las respuestas de los docentes dan indicadores de operaciones con números enteros con multiplicaciones y divisiones, y no así, del uso de un operador fraccionario (a/b).

En general, podemos decir que los docentes tienen una tendencia a buscar procedimientos algorítmicos, lo cual limita el desarrollo de procedimientos espontáneos. Tienen una fuerte preocupación por encontrar el algoritmo para resolver el problema con el modelo escolar: datos, operaciones y resultados, en donde la operación debe ser la adecuada. Por lograr lo anterior, los docentes no analizan los datos y, en general, no los vinculan con significados, es decir, no utilizan una matemática intuitiva, sino que se quedan en el conocimiento formal de las matemáticas.

Los docentes poseen una limitación al no poder relacionar los algoritmos con acciones lógicas, lo anterior puede deberse a la tendencia a reducir a la fracción a un solo significado, o por centrarse prematuramente en la sintaxis de las operaciones sin haber realmente interiorizado o reflexionado el contexto situacional del problema planteado. Se basan en lo que Kieren (14) llama conocimiento intuitivo, en el cual los docentes conectan su conocimiento en relación con los números racionales a uno que no puede ser validado en términos reales; por lo que sólo conciben a la fracción como la división y/o reparto de objetos concretos.

El conocimiento de los docentes aquí estudiados es bastante limitado, ya que como afirma Kieren (14) la construcción del conocimiento matemático, en general, y el conocimiento del número racional en particular, son procesos crecientes en donde se vinculan experiencias cotidianas. Las respuestas dadas por los docentes aquí estudiados nos hablan de una falta de familiaridad con experiencias que implican la fracción en sus diferentes significados. Si bien es cierto, dichas experiencias suelen ser limitadas, la concepción que los docentes poseen en relación con la fracción no les permite imaginarla fuera de su concepción.

Se han estudiado a lo largo de esta investigación los subconstructos de fracción como razón y como operador multiplicativo y se han encontrado una gran variedad de procedimientos algorítmicos de resolución, no sólo de éxito, sino también de fracaso, lo que nos habla de la dificultad relacionada con la construcción de estos dos significados. Lo anterior, fue encontrado por Kieren (14) en su estudio y lo explica mediante el dominio que implican, ya que los constructos de razón y operador multiplicativo se relacionan con un dominio formal multiplicativo, a diferencia de los otros que implican un dominio formal aditivo.

Es importante recalcar la finalidad de los campos conceptuales propuestos por Vergnaud (31), que es proporcionar un marco que permita comprender las filiaciones y rupturas entre conocimientos, y se entiende por conocimiento tanto los intuitivos como la cultura adquirida. Los docentes no parecen comprender lo anterior, por lo que podemos afirmar que su conocimiento al respecto es sumamente limitado y esto afectará de manera determinante el proceso de enseñanza y de aprendizaje dentro del actuar educativo.

No logran concebir a la fracción como una estructura matemática, ya que ésta se entiende como un concepto de gran complejidad que debe abarcar situaciones y problemas diferentes para que dicho concepto adquiera sentido. Por lo que la construcción que ellos puedan propiciar en sus alumnos será reducido ya que no plantearán su uso en diferentes situaciones o problemas si ellos mismos no los conocen.

La mayoría de las situaciones que se plantearon en esta investigación se ubicaron en las clases de situaciones para las cuales el sujeto no dispone de todas las competencias necesarias, lo que obligó a los docentes invertir un tiempo de reflexión y de exploración, solucionando así el problema planteado mediante ensayo error; lo anterior, los condujo eventualmente al éxito y en otras ocasiones al fracaso.

Los esquemas que los docentes poseen en relación con la fracción no poseen la característica del dinamismo, ya que no conciben la idea de aplicar un esquema en diferentes situaciones, ya que su análisis de las situaciones no les permite determinar si éstas admiten o no el mismo esquema de solución.

Kieren (16) nos habla de que los niños en un nivel de madurez poseen un conocimiento de equivalencia de naturaleza multiplicativa, lo que se relaciona con el razonamiento proporcional. La afirmación anterior resulta de suma preocupación, ya que los docentes aquí estudiados no dieron indicadores de poseer este nivel de madurez.

La práctica de estos docentes debe complementarse, como afirma Fernández (11), ya que no es posible organizar la enseñanza sobre la base simplista del mero conocimiento, sin ningún conocimiento acerca de por qué es eso lo que debe hacerse y no otra cosa. Especialmente en el caso de nuestros docentes, ya que su base del conocimiento es sumamente reducida.

Al analizar un poco los comentarios realizados por los docentes durante la aplicación del instrumento, podemos corroborar lo encontrado por Peltier (23) en cuanto a que los docentes afirman que los saberes matemáticos de la escuela son los únicos necesarios para enseñar matemáticas, ya que ellos sólo deben 'mostrar' lo que está en el libro. Uno de los profesores aquí

estudiados justificó todo su actuar con el hecho de que esos problemas no los tiene que enseñar en el grado que atiende.

La práctica educativa desarrollada por estos docentes debe ser deficiente, ya que como afirma Peltier (23), ésta se determina por dos factores principalmente: el nivel de dominio en matemáticas de los docentes, y el tipo de clases en la que se desarrolla la práctica educativa. Con los resultados aquí obtenidos, sabemos que el dominio en matemáticas del docente no es el adecuado, no nos preocupemos ahora por el tipo de clase en la que se desarrolla, ya que si consideramos que puede tener un grupo de alumnos sumamente inquieto, el docente se preocupará por mantener el orden dentro del grupo y no por la construcción de conocimiento que ahí se pueda generar.

Por todo lo anterior, podemos afirmar que el significado que se relacione con la expresión a/b repercutirá tanto en las estrategias de solución de problemas como en la práctica docente, por lo que la enseñanza de las fracciones se matizará con la idea que de éstas se tenga.

IMPLICACIONES EDUCATIVAS PARA EL ALUMNO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Todos los resultados que se han analizado anteriormente tienen grandes repercusiones educativas. A lo largo de este estudio se ha mencionado cómo es que la forma en que los profesores enseñan repercute de manera significativa en el aprendizaje de los alumnos.

En este apartado, se pretende explicar más ampliamente las repercusiones de los resultados del trabajo de campo.

La matemática tiene una naturaleza lógica, abstracta y rigurosa; generalmente se define por sus contenidos. Según la teoría de los campos conceptuales las estructuras matemáticas pueden adquirir diferentes significados con base en el contexto en que se apliquen; y una estructura matemática no está completamente definida si no se hace en todos y cada uno de estos significados.

Existen dos factores determinantes de la práctica educativa: el nivel de dominio en matemáticas del docente, y el tipo de clases en la que se desarrolla la práctica educativa. La didáctica es el conjunto de relaciones que vinculan los polos maestro alumno saber; esta tríada determinará muchas de las actividades que se desarrollan en clase. Si los docentes no dominan el contenido a enseñar, la didáctica se verá afectada y no se logrará esta vinculación de polos. Con base en lo anterior y en los resultados obtenidos, podemos decir que la práctica educativa que realicen los docentes será deficiente, en tanto que el nivel de dominio del contenido a enseñar es deficiente.

La práctica educativa de los docentes se considera deficiente debido a:

- a) Los docentes deben propiciar que los alumnos adquieran los referentes necesarios para poder dar soluciones a problemáticas de manera inmediata. Pero si desconocen los diferentes significados que la estructura matemática puede adquirir, no plantearán situaciones para lograr la familiaridad con éstas por parte del alumno.
- b) Otro aspecto determinante de la práctica educativa es el relacionado con la evaluación. El proceso de enseñanza y de aprendizaje debe caracterizarse por una evaluación continua, sin embargo, se da cuenta de los resultados finales con la evaluación; si el conocimiento que el docente tiene en relación con la fracción es pobre como es el caso de los docentes aquí estudiados la evaluación también lo será, ya que no se puede evaluar algo que no se conoce.
- c) Lo anterior puede implicar también que la dinámica de clase se vuelva rígida porque si el profesor no conoce y domina el tema a enseñar, lo más probable es que no le permita a los

alumnos plantear cuestiones diferentes a lo que él sabe; la enseñanza será impuesta debido a su falta de conocimiento y manejo del tema.

- d) Los alumnos que se enfrenten a este tipo de docentes presentarán grandes deficiencias a nivel educativo. Los conceptos matemáticos que puedan construir serán incompletos, ya que sólo se les permitirá conocer algunas partes de éstos (en este caso la fracción como cociente y como medida). Además, es probable que no exista una verdadera construcción, ya que el docente impondrá para evitar que los alumnos lleguen a algo desconocido para él. Pueden llegar a 'adoptar' como procedimientos canónicos de resolución algunos esquemas que no resulten ser los más eficaces y efectivos para la solución de determinadas situaciones.
- e) El hecho de que los conceptos de las estructuras matemáticas esté incompleto, repercutirá en el futuro educativo de los alumnos. Matemáticamente, existe una secuencia de estructuras, dentro de la que se avanza de la más sencilla a la más compleja y unas dan base a otras; por lo que si no se comprende una estructura que dé base a otra más compleja, tampoco se comprenderá ésta.
- f) Al enfrentarse a situaciones que impliquen la fracción como operador y como razón, los alumnos utilizarán una serie de esquemas inadecuados. Intentarán, y en algunas ocasiones lograrán resolver los problemas utilizando otras estructuras matemáticas mejor comprendidas o conocidas que la fraccionaria, como puede ser la sustracción o la división, es decir, sin el uso del procedimiento canónico de resolución convencional. Además, lo anterior será difícil de 'cambiar' o corregir si el propio docente desconoce el error.
- g) Pueden existir otras repercusiones, además de las académicas, como las de tipo social y psicológico, ya que una persona que no logra erradicar una laguna en un contenido matemático como este, no logrará resolver situaciones que se le presenten en su vida cotidiana o profesional. De tipo psicológico, ya que los alumnos que se enfrentan a docentes como éstos, no logran comprender y encontrar el verdadero sentido de la matemática y se sienten completamente aborrecidos por ésta; llegando a un estado en el que se convencen a sí mismos que no pueden resolver problemas matemáticos.

El hecho de que los docentes se encuentren en este nivel de deficiencia en el conocimiento de la estructura fraccionaria impedirá y no propiciará la verdadera construcción por parte de los alumnos, ya que se enfocará en los resultados y no en el proceso. Además, al no conocer el docente que existe un proceso de construcción de la estructura fraccionaria, no detectará la etapa del proceso en que cada alumno se encuentra para así lograr que avance en éste.

CONCLUSIONES

1. Las respuestas de algunos de los docentes dan indicadores de no conocer la teoría de los campos conceptuales, todo indica que no logran concebir que una estructura matemática pueda adquirir diferentes significados según el uso y contexto en que se apliquen. Al no conocer los diferentes significados que una estructura matemática puede adquirir, los conceptos que los docentes posean serán incompletos.
2. Podemos afirmar que los docentes no han construido el concepto de fracción, ya que según Vergnaud (30), los conceptos se construyen mediante la utilización de la estructura en diferentes situaciones o problemas, sin embargo, los docentes aquí analizados no logran utilizar a la fracción en los subconstructos de la fracción como razón y como operador multiplicativo, dos de las situaciones en las cuales puede ser aplicada.
3. La mayoría de las respuestas dadas por los docentes se basan en lo que Kieren (14) llama conocimiento intuitivo, en el que los docentes conectan su conocimiento en relación con los números racionales a uno que no puede ser validado en términos reales; por lo que sólo conciben a la fracción como la división y/o reparto de objetos concretos.

4. Al analizar la variedad y la historia de las situaciones planteadas, se llegó a la conclusión que los docentes pudieron haberse enfrentado en alguna ocasión a situaciones similares o relacionar los problemas que implicaban fracción como operador; por el contrario, las situaciones que implicaban fracción como razón no son nada fáciles de relacionar con otras, y es muy poco probable que los docentes hayan podido tener una experiencia previa similar a las planteadas. Por lo anterior, se les facilitó más la solución de los problemas que implicaban fracción como operador multiplicativo que los que implicaban fracción como razón.
5. El hecho que de una cuarta a una quinta parte de los docentes no han entrado a la relación proporcional más sencilla (doble), y al enfrentarse a problemas que implican esta relación asimilan el problema con otro tipo de estructuras como la aditiva resulta preocupante, ya que estos docentes no serán capaces de enseñar adecuadamente a sus alumnos las relaciones proporcionales implicadas en muchas situaciones, como las que implican una relación multiplicativa.
6. Para dar solución a los problemas planteados la mayoría de los docentes evidenció la falta de familiaridad con las operaciones implicadas en ellos, por lo que el planteamiento de las situaciones significó para la solución una reflexión y un ensayo error, ya que los referentes que poseen los docentes no les permitieron dar una respuesta inmediata.
7. Los esquemas que los docentes utilizaron fueron en ocasiones eficaces, pero no efectivos, ya que algunos lograron dar respuesta de manera favorable al cuestionario aplicado; sin embargo, la mayoría no utilizó el procedimiento canónico de resolución convencional, lo que implica que no fueron efectivos.
8. Al analizar los libros de texto encontramos planteamientos de situaciones que implican la fracción como razón y como operador multiplicativo, sin embargo, al presentarles otras situaciones diferentes, los docentes no logran identificar la estructura matemática que sirve como procedimiento canónico de resolución. Por ello podemos decir que el conocimiento de los docentes en relación con la fracción como estructura matemática es deficiente.
9. Se habló de la didáctica como el conjunto de relaciones que vinculan los polos maestro alumnos saber, sin embargo, al analizar los resultados podemos afirmar que los docentes no logran hacer esta triangulación eficientemente en relación con la estructura fraccionaria. Con base en los resultados obtenidos, creemos que la vinculación entre los maestros y sus alumnos será deficiente si no conocen por completo el contenido.
10. El hecho de que el conocimiento que poseen los docentes en relación con la fracción sea deficiente tiene grandes repercusiones en los alumnos que éstos atienden, entre las más importantes encontramos que:
 - Los alumnos no podrán familiarizarse con los diferentes significados si el propio docente no los conoce;
 - La evaluación será deficiente, ya que no pueden evaluar algo que no conocen;
 - La dinámica de clase se vuelve rígida porque el docente no permitirá a los alumnos cuestionarlo;
 - Los conceptos que los alumnos construyan serán incompletos debido a que el docente impondrá algunas cosas y no habrá un verdadero conocimiento.
11. Los reactivos fueron presentados de menor a mayor complejidad, con lo que los profesores se mostraron cada vez más desarmados para resolver las situaciones que se les planteaban. Lo anterior resulta preocupante y nos reafirma lo encontrado en el estudio realizado por Peltier (23) en relación con la consideración de los profesores de que los conocimientos necesarios para enseñar matemáticas son los de la escuela, los docentes no van más allá de éstos porque lo único que deben hacer es 'mostrar' a los alumnos lo que está en el libro de texto.

12. La hipótesis planteada “Los docentes de educación primaria logran resolver situaciones en las que están implicadas la fracción como operador y como razón, pero no lo hacen de la manera convencional” , la hemos considerado no comprobada debido a la falta de conocimiento por parte de los docentes de los dos significados de la fracción aquí estudiados. Lo anterior implicó que los docentes no lograran resolver las situaciones en las que estaban implicadas la fracción como operador y como razón.
13. La información obtenida en este trabajo permitirá plantear alternativas para el mejoramiento de las propuestas de actualización en lo que se refiere a los contenidos de la fracción. Es decir, al conocer los resultados de estudios como éste se podrán hacer los ajustes necesarios a los programas de formación y actualización docente para poder así mejorar los conocimientos en relación con la fracción para garantizar así mejores resultados en el proceso de enseñanza y de aprendizaje.
14. El conocimiento de las concepciones de los docentes que obstaculizan la solución de problemas que implican fracción como razón y como operador multiplicativo puede dar pie a la propuesta de cambios fundamentados a algunas actividades, —ya sea de las propuestas en los libros de texto, en los ficheros o en los cursos de formación y actualización docente—, con el fin de movilizar dichas concepciones.
15. Se puede, además, proponer cambios de las estrategias en el planteamiento de situaciones didácticas, para lograr así que las implicaciones educativas sean más favorables para los alumnos que estos docentes atienden. Lo anterior debe hacerse desde la formación docente, así como durante el proceso de actualización (carrera magisterial), complementado con los libros de texto para el alumno y el maestro, los ficheros y los avances programáticos.
16. El presente es un estudio que puede ser continuado por diferentes medios, uno de ellos sería analizar de manera empírica las repercusiones de los resultados obtenidos en el proceso de aprendizaje de los alumnos que estos docentes atienden. También sería interesante observar la metodología que utilizan en clase al utilizar alguna de las lecciones que implican los dos significados de la fracción aquí estudiados planteadas por la SEP. Otra posible opción de continuar esta investigación, sería mediante las repercusiones que esto tiene para los docentes y las soluciones que pueden darse.
17. Este estudio se limitó al análisis de datos obtenidos en una sola escuela, por lo que el estudio se puede ampliar mucho más en este sentido. Además, se mencionaron las implicaciones en los alumnos de manera hipotética, ya que no se obtuvieron datos al respecto. Otra limitación del estudio es que se realizó sólo con base en respuestas obtenidas por los docentes y no se observó su actuar dentro del aula al tratar estos temas.
18. Personalmente, la realización de este estudio me proporcionó conocimientos de tipo conceptual, procesual y actitudinal. De tipo conceptual, ya que las investigaciones realizadas permitieron ampliar los conocimientos en cuanto a la fracción como estructura matemática; de tipo procesual porque permitió el reconocimiento de algunas situaciones que implicaban la fracción como operador multiplicativo y como razón, además se amplió el conocimiento en relación con el procedimiento de investigación; y de tipo actitudinal, ya que al ser una investigación con este grado de formalidad, implicó actitudes y comportamientos profesionales para la realización de la misma.

BIBLIOGRAFÍA

1. Álvarez Icaza, Ana María, et. al. “Estudio exploratorio sobre fracciones comunes II: conceptos y estrategias de solución de problemas y operaciones en niños de primaria”, Subsecretaría de Servicios Educativos para el D.F, SEP, México, 1994.

2. Avalos Rogel, Alejandra. "Estudio de las transformaciones que sufren las concepciones de los maestros sobre contenidos geométricos en un curso de actualización", Tesis para obtener el título de Maestro en Ciencias en la Especialidad de Investigación Educativa, CINVESTAV, I.P.N., México, 1997.
3. Balbuena Corro, Hugo. "Análisis de una secuencia didáctica para la enseñanza de la suma de fracciones en la escuela primaria", Tesis para obtener el título de Maestro en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa. CINVESTAV, I.P.N., México, 1999.
4. Baroody, Arthur J. *El pensamiento matemático de los niños: un marco evolutivo para maestros de preescolar, ciclo inicial y educación especial*, 4ª edición, Ed. Visor, Madrid, 2000.
5. Beher, Merlin y Leser, Thomas. "Ideas de los números racionales y el rol de los sistemas representativos", en Trabajos sobre la enseñanza de las fracciones. Matemática Educativa, I.P.N. México, 1983.
6. Bergeron, Jacques y Nicolás Hercovics. "Unit fractions of a continuous whole", en *Proceedings of the PME – XI*, Vol. 1. Canadá, 1987.
7. Block Sevilla, David Francisco. "Estudio didáctico sobre la enseñanza y el aprendizaje de la noción de fracción en la escuela primaria", Tesis para obtener el título de Maestro en Ciencias en la Especialidad de Investigación Educativa, CINVESTAV, I.P.N., México, 1986.
8. Block Sevilla, David Francisco. "La noción de la razón en las matemáticas de la escuela primaria: un estudio didáctico", Tesis para obtener el título de Doctor en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa, CINVESTAV, I.P.N., México, 2001.
9. Brousseau, Guy. "Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas", en Sánchez, Ernesto y Zubietta, Gonzalo (comp.) Lecturas en didáctica de las matemáticas. Escuela francesa. CINVESTAV, Departamento de Matemática Educativa, México, 1993.
10. Enrenfreid Hofmann, Joseph. *Historia de la matemática*, Ed. Limusa, México, 2002.
11. Fernández Pérez, Miguel. *Las tareas de la profesión de enseñar. Práctica de la racionalidad curricular, Didáctica aplicable*, Ed. Siglo XXI, Madrid, 1994.
12. Hernández Sampieri, Roberto, et. al. *Metodología de la investigación*, 2ª edición. Mc Graw Hill Interamericana, México, 1999.
13. Hart, Kathleen. "El entendimiento de las fracciones en la escuela secundaria", en *Trabajos sobre la enseñanza de las fracciones. Matemática Educativa*, I.P.N. México, 1983.
14. Kieren, Thomas y Doyal Nelson. "The operator construct of rational numbers in childhood and adolescence: an exploratory study", en *The Alberta Journal of Educational Research*. vol. 24. Canadá, 1978.
15. Kieren, Thomas. *Los constructos de número racional — sus elementos y mecanismos*, Ed. Universidad de Alberta. Canadá, 1980.
16. Kieren, Thomas. *La partición, la equivalencia y la construcción de ideas relacionadas con los números racionales*, Ed. Universidad de Alberta. Canadá, 1983.
17. Larousse *Diccionario Enciclopédico*, 3ª. Ed. Larousse, México, 1998.
18. Lerner, Delia. *Piaget Vigotsky: contribuciones para replantear el debate*, Paidós, México, 1996.
19. Mancera Martínez, Eduardo. "Significados y significantes", en *Educación Matemática*, vol. 4, SEP, México, 1992.
20. *Matemáticas: sexto grado*, Libro de texto. Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal, SEP, México, 1995.
21. *Matemáticas: quinto grado*, Libro de texto. Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal, SEP, México, 2000.
22. Peltier, Marie — Lise. "Tendencias de la investigación en la didáctica de las matemáticas y la enseñanza de los números en Francia", en *Educación Matemática*. Vol. 7, SEP, México, 1995.
23. Peltier, Marie — Lise. "Representaciones de los profesores de la escuela primaria sobre las matemáticas y su enseñanza", en *Educación Matemática*, vol. 11, SEP, México, 1999.
24. Rey Pastor, Julio y José Babini. *Historia de la matemática: de la antigüedad a la baja edad media*, Ed. Gedisa, España, 2000.
25. Rey Pastor, Julio y José Babini. *Historia de la matemática: del renacimiento a la actualidad*, Ed. Gedisa, España, 2000.
26. Rockwell, Elsie (comp.) *Ser maestro, estudios sobre el trabajo docente*, Ed. El Caballito – SEP, México, 1985.