

# *La Construcción de la transitividad de la desigualdad con números enteros negativos en la Escuela Secundaria*

María Concepción Terríquez Paz  
Universidad La Salle Guadalajara  
E-mail: [mterriquez@yahoo.com](mailto:mterriquez@yahoo.com)  
Asesora: María Guadalupe Moreno Bayardo

*Recibido: Abril de 2005. Aceptado: Mayo de 2005*

## RESUMEN

Esta es una investigación descriptiva y cualitativa en tres etapas, a lo largo de un ciclo escolar, realizada en una escuela secundaria oficial. El objetivo principal fue dar cuenta del proceso mediante el cual los niños y adolescentes construyen la transitividad con números enteros. Se partió de la hipótesis de que hay un paralelismo en la construcción de las operaciones y relaciones de orden, cuando menos en el nivel de las unidades simples. Se utilizaron las entrevistas clínicas para plantear a los sujetos de la muestra situaciones problemáticas y una actividad de correspondencia entre figuras geométricas de diferentes tamaños y etiquetas que hacían referencia a números enteros, positivos y negativos; esto permitió detectar que los niños y adolescentes construyen la transitividad con números enteros en el orden de las unidades simples mediante una secuencia de tres niveles constructivos: alteración, composición e integración. Esta secuencia está correlacionada con el avance de los sujetos en operaciones y ecuaciones aditivas, relaciones de orden, el estatus del cero, la abstracción y generalización y la evolución de los modelos que utilizan para justificar sus respuestas; muestran diferente desempeño de acuerdo con el contexto de la situación problemática, así como un anclaje en lo concreto, esto es, les cuesta trabajo justificar su respuesta a una situación problemática sin hacer referencia a situaciones concretas; además, verbalizan más ante una ecuación que ante una operación directa y muestran un rezago en la toma de conciencia con respecto a lo que pueden hacer con operaciones físicas o mentales.

El objetivo principal de esta investigación fue dar cuenta del proceso mediante el cual los niños y adolescentes construyen la transitividad con números enteros. Los particulares fueron describir las secuencias de desempeño en las que se manifiesta la evolución de los sujetos en su construcción de la transitividad de la desigualdad, dentro de la construcción más general de las relaciones de orden y operaciones con números enteros negativos. Además, construir cuando menos un principio teórico, con carácter hipotético, sobre la construcción de la transitividad de la desigualdad con números enteros, desde una perspectiva psicológica. Se presentan los hallazgos, a manera de una gran hipótesis que tendría que confirmarse con estudios posteriores, además de las limitaciones y los aportes de esta investigación.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Trabajo ganador de la Medalla "Hno. Salvador González 2005", Área Educación y Humanidades, Nivel Posgrado, Categoría Avanzada, XII Jornadas de Investigación, Universidad La Salle, Abril 2005.

<sup>2</sup> Investigación realizada en una escuela secundaria mixta de la zona metropolitana de Guadalajara, Jal., México. Asesora: María Guadalupe Moreno Bayardo.

*Palabras clave: Construcción de la transitividad, números enteros, resolución de problemas, desigualdad.*

## ABSTRACT

This is a descriptive and qualitative research in three stages, along a school period, made in an official secondary school. The main goal was to realize the process children and adolescents use to built transitivity with whole numbers. A starting hypothesis respect the existence of a paralell link between the development of operations and order relationships, at least at the simple units level. Clinic interviews were applied to provide the subjects of the sample problematic situations and a corresponding activity between geometrical figures of various sizes and labels related to whole numbers, positive and negative; this allowed detecting that children and adolescents built transitivity with whole numbers following the simple units order through a sequence of three building levels: alteration, composition and integration. This sequence is correlated with the advance of the subjects with additive operations and equations, order relationships, status of zero, abstraction and generalization, and the models evolution used to justify their answers. They show a diverse performance according to the context of the problem, as well as being anchored in the concrete, which means, they find it hard to justify their answers to a problem without referring to concrete situations; besides, they verbalize more in front of an equation than in front of a direct operation and show some falling behind in awareness respect to what they can do with physics and mental operations.

The main objective of the present research was to realize the process through children and adolescents built transitivity with whole numbers. The details were to discover manifested performance sequences where evolution of subjects in the building of uneven transitivity, within a more general construction of order relationships and operations with negative whole numbers. Besides, to built at least a theoretical principle as a hypothesis on unevenness of transitivity construction with whole numbers, from a psychological approach. The findings are shown, as a major hypothesis that needs to be confirmed with later research, considering also the limitations and contributions of this research.

Key words: Transitivity construction, whole numbers, problem solving, unevenness.

### 1. La escuela secundaria

Los planes y programas de estudio de la Secretaría de Educación Pública (SEP)<sup>2</sup> para la educación secundaria enfatizan que la finalidad de la matemática es desarrollar habilidades operatorias y la capacidad para la solución de problemas. La SEP recomienda a los profesores de matemáticas en la escuela secundaria dedicar atención a la enseñanza de los números con signo.

Con respecto a la formación de profesores, en Jalisco hay dos instituciones que por excelencia han sido las formadoras de los docentes en el área de matemáticas para el nivel secundaria: la Escuela Normal Superior de Jalisco y la Normal Superior Nueva Galicia. En las tesis de licenciatura de estas instituciones, uno de los temas frecuentes es la enseñanza de los números negativos, de ahí que hay una aceptación de la importancia que tiene el contenido en la formación de los estudiantes de secundaria. Además, hay investigadores de prestigio, como Vergnaud,<sup>3</sup> quien reconoce que hay serias dificultades en el aprendizaje de los números negativos.

<sup>2</sup> a) Secretaría de Educación Pública, *Educación Básica. Secundaria*. México, 1993.

b) Secretaría de Educación Pública, *Libro para el maestro. Matemáticas. Secundaria*. México, 1994.

<sup>3</sup> Vergnaud, G., *Cambios cognitivos importantes en el aprendizaje de las matemáticas. Una perspectiva de desarrollo*. Conferencia en el ICME-8, 1996 [en línea]. Disponible en: <http://thales.cica.es/icme8/Resumenes.html#Conferencias Plenarios>, 7 de febrero de 2005.

Sin embargo, se considera que la mejor justificación para esta investigación es que los alumnos de secundaria donde se hizo la investigación tienen dificultades para construir los números enteros, positivos y negativos, además de que les cuesta trabajo construir las relaciones de orden con los mismos números. Se presenta como evidencia el caso de una alumna que sí pudo resolver la operación  $(+8) + (-5) = +3$  en un examen escrito, pero que cambia su respuesta ante la contra argumentación:

- Investigadora: ¿Por qué salió un número positivo?
- Alumna: Porque así es.
- I: Tus compañeros dicen que es tres negativo. ¿Tú que crees?
- A: [No contesta, borra la respuesta y escribe -3].<sup>4</sup>

Algunos(as) alumnos(as) de la secundaria donde se realizó la investigación ordenaban los números negativos de las formas siguientes:

- Por parejas: 0, -1, +1, -2, +2, -3, +3...
- Aceptan que los negativos son menores que el cero, pero los ordenan en forma no simétrica: -1, -2, -3..., 0, +1, +2, +3...
- Ordenación simétrica: ...-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3..., pero diciendo: "Van así porque así dijo el maestro" o "Porque Dios así quiso".<sup>5</sup>

## 2. Antecedentes de investigación

Investigaciones anteriores a ésta, como las de Vergnaud<sup>6</sup> y Gallardo,<sup>7</sup> están centradas en operaciones (suma y resta), no consideran a las relaciones de orden como objeto de estudio y no dan una definición de lo que implica construir el concepto de número negativo.

Gallardo<sup>8</sup> realizó su investigación en una escuela secundaria del medio urbano. En el trabajo exploratorio encontró que, además de tener dificultades con las operaciones, los alumnos tienen dificultad para comprender el orden entre enteros. Ella llevó a cabo una propuesta pedagógica con el método chino modificado (la unidad negativa anula a la positiva), e hizo una serie de entrevistas clínicas después del tratamiento, con lo cual identificó 4 diferentes perfiles de desempeño, sin embargo, el orden entre enteros no es un indicador de los mencionados perfiles.

Terríquez<sup>9</sup> en una investigación de diagnóstico y propuesta de neutralización en una escuela secundaria femenil, encontró que no se han investigado lo suficiente las relaciones de orden y que hay un paralelismo en la construcción de relaciones de orden y operaciones aditivas, cuando menos en el nivel de las unidades simples.

Cid<sup>10</sup> en una investigación documental de corte histórico, sugiere la posibilidad de que los adolescentes tengan obstáculos epistemológicos para la construcción de los números negativos.

<sup>4</sup> Durante la entrevista traté de no sugerir las respuestas, pero una vez concluido el interrogatorio, la orienté en el uso de los signos. Realicé la entrevista en el 2000.

<sup>5</sup> Realicé un muestreo aleatorio de 12 alumnos, con el fin de evidenciar la problemática, junio de 2001.

<sup>6</sup> Vergnaud, G., *El niño, la matemática y la realidad*. 1ª ed., 2ª reimpresión, México: Trillas., 1995.

<sup>7</sup> Gallardo, A., "El paradigma cualitativo en matemática educativa. Elementos teórico-metodológicos de un estudio sobre números negativos", en F. Hitt Espinoza (Edit.), *Investigaciones en matemática educativa*, 1ª ed., México: Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 197-222, 1996.

<sup>8</sup> *Ibíd.*

<sup>9</sup> Terríquez, M. C., *La construcción de las relaciones de orden con números enteros negativos: diagnóstico y propuesta*, Tesis de Maestría no publicada, Universidad La Salle, Guadalajara, México, 1999.

<sup>10</sup> Cid, E., *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos*, (sin fecha), [En línea], 2000. Disponible en: <http://www.uqr.es/~iqodino/siidm/boletin10.htm>, 7 de febrero de 2005.

Bruno y Espinel<sup>11</sup> realizaron su investigación sobre números negativos en la escuela secundaria. Hicieron una comparación entre tres métodos de enseñanza (redactar problemas, resolver problemas y aplicación de reglas), encontrando que los sujetos resolvían con operaciones o con representaciones gráficas de desplazamientos en los tres casos.

Gallardo<sup>12</sup> analizó, en otra investigación, la extensión del dominio de los números naturales al dominio de los enteros en la transición de estudiantes de la aritmética al álgebra. Encontró 4 niveles de aceptación del número entero: sustrayendo, número relativo, número aislado, número negativo formal. Los primeros 3 niveles fueron observados en 35 estudiantes de secundaria (12-13 años de edad).

La revisión de las investigaciones sobre números negativos muestra que, básicamente, hay dos tipos de propuestas: 1) De neutralización: los números negativos se consideran opuestos a los positivos, por lo que una unidad positiva más una unidad negativa es igual a cero. 2) De desplazamiento: los números negativos se desplazan en sentido contrario que los positivos, ya sea en una recta numérica, un termómetro o el plano cartesiano.<sup>13</sup> Pero estas mismas investigaciones no dan evidencia de cuáles son *los modelos que los sujetos utilizan* cuando resuelven situaciones problemáticas que requieren números enteros. Además, hay un dominio de las operaciones aditivas sobre las relaciones de orden con números negativos, de la cardinalidad sobre la ordinalidad, y una secuencia rígida de enseñanza (primero el orden, después las operaciones aditivas).

A partir de los puntos anteriores, se precisó el objeto de estudio de esta investigación en el contexto de la escuela secundaria: ¿Cuáles secuencias de desempeño muestran los niños y adolescentes en la construcción de la transitividad de la desigualdad con números enteros positivos y negativos? Partiendo de ahí se diseñó un estudio en tres etapas, con sujetos de los tres grados de secundaria, con la intención de inferir el proceso que siguen para pasar de un estado de menor conocimiento de la transitividad con números enteros a otro de mayor conocimiento.

### 3. Bases teóricas

Las bases teóricas son el constructivismo de Piaget y García,<sup>14</sup> con aportes de Delval<sup>15</sup> y García,<sup>16</sup> entre otros. Piaget<sup>17</sup> inició sus investigaciones con el supuesto de que hay una convergencia entre la construcción psicológica del conocimiento, la historia de las ciencias y el análisis formal de las matemáticas. Esto no significa que haya una coincidencia de contenidos entre la psicología, las demostraciones formales y la historia del número negativo, sino que hay una convergencia de los mecanismos de pasaje de un nivel a otro, supuesto del que se comparte en esta investigación.

---

<sup>11</sup> Bruno, A. y Espinel, M. C., "Problemas aditivos con números negativos: estudio sobre tres métodos de enseñanza con alumnos de nivel medio básico", *Educación Matemática*, Vol. 14, N° 1, 82-104, México: Grupo Editorial Iberoamérica, 2002.

<sup>12</sup> Gallardo, A., "The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra". En *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 49, N° 2, 171-192, 2002, [En línea], Disponible en: ERIC Document Reproduction Service N° E] 654482.

<sup>13</sup> Gallardo, A., op. cit., "El paradigma..."

<sup>14</sup> a) Piaget, J., García, R., *Psicogénesis e historia de la ciencia*, 7ª ed., México: Siglo Veintiuno, 1996.

b) Piaget, J., García, R., *Hacia una lógica de las significaciones*, 2ª ed., España: Gedisa, 1997.

<sup>15</sup> a) Delval, J., *Crece y pensar. La construcción del conocimiento en la escuela*, México: Paidós, 1999.

b) Delval, J., *Descubrir el pensamiento de los niños. Introducción a la práctica del método clínico*, España: Paidós, 2001.

<sup>16</sup> García, R., *El conocimiento en construcción. De las formulaciones de Jean Piaget a la teoría de sistemas complejos*, España: Gedisa, 2000.

<sup>17</sup> Piaget, J., *Tratado de lógica y conocimiento científico. Naturaleza y métodos de la epistemología*, México: Paidós, 1992.

Se ha constatado que la estructura formal de la transitividad de la igualdad "si  $X=Y$  y  $Y=Z$ , entonces,  $X=Z$ , cualesquiera que sean  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ ", no se *adquiere* de una vez por todas independientemente de su contenido, sino que se requieren tantas adquisiciones distintas y repetidas como contenidos diferentes a los que pueda aplicarse, por ejemplo, masa, peso, volumen y número natural,<sup>18</sup> y en esta investigación se considera que los números enteros son el mismo caso.

Dada una relación asimétrica, tal que  $a < b$ , los sujetos comienzan comprendiendo los casos particulares:  $a < b$ ,  $b < c$ ,  $c < d$ , pero sin hacer conexiones entre ellos. El sujeto comienza a identificar que un elemento  $e$  es menor que  $f$ ,  $g$ ,  $h$ , y mayor que  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ . Después logrará hacer una intercalación inmediata de elementos sobreañadidos, y podrá invertir la serie tal que  $a < b$ ,  $b < c$ ,  $c < d$  se transforma en  $d > c > b > a$ , entonces se dice que ha construido la transitividad en esa relación.<sup>19</sup> La transitividad de la igualdad con números naturales se construye en forma análoga.

En la construcción del número natural, se fusionan las relaciones de clases y las asimétricas, de acuerdo con las investigaciones de Piaget y Szeminska:<sup>20</sup> "En consecuencia [...] el número se presenta como la síntesis de la clase y de la relación asimétrica o, lo que viene a ser lo mismo, de la relación simétrica (igualdad) y de las diferencias (relaciones asimétricas)", y al iniciar esta investigación se esperaba algo semejante con los números enteros.

#### 4. Metodología

De acuerdo con Delval<sup>21</sup> y con Hernández Sampieri, Fernández Collado y Baptista Lucio,<sup>22</sup> un estudio longitudinal permite observar los procesos de construcción del conocimiento, pero requiere hacer un *seguimiento constante* de unos cuantos sujetos, lo cual no era posible en esta investigación; con los diseños transversales se pueden tomar muestras de diferentes edades y reconstruir los procesos mediante inferencias, lo que es más fácil para el investigador, pero tiene el inconveniente de que se requieren muestras grandes de sujetos; en cambio, con los diseños *mixtos*,<sup>23</sup> también llamados *panel*,<sup>24</sup> es posible evitar los inconvenientes de ambos tipos de estudio, y reconstruir el proceso con una muestra relativamente pequeña de sujetos de los tres grados de secundaria y entrevistas periódicas, aunque este diseño no ofrece la validez de los estudios longitudinales.

Por estas razones, en esta investigación se utilizó un diseño mixto, consistente en la selección al azar de 21 sujetos de los tres grados de secundaria (seis de primero, siete de segundo y ocho de tercero), para hacer un estudio con entrevistas clínicas en tres momentos del ciclo escolar 2002-2003 (octubre del 2002, y febrero y junio del 2003),<sup>25</sup> y describir la construcción de la transitividad de la desigualdad y del número entero mediante inferencias.

Se consideró conveniente entrevistar alumnos(as) de los tres grados escolares ya que se requerían sujetos con desempeños diferentes, que fueran transformándose a lo largo del período en que se realizó la investigación y que permitieran observar el proceso de

<sup>18</sup> Piaget, J., Inhelder, B., *El desarrollo de las cantidades en el niño*, España: Nova Terra, 1971.

<sup>19</sup> Piaget, J., *La equilibración de las estructuras cognitivas*, España: Siglo Veintiuno, 1978.

<sup>20</sup> Piaget, J., Szeminska, A., *Génesis del número en el niño* (7ª ed.), Argentina: Guadalupe, pp. 288, 1987.

<sup>21</sup> Delval, J., op. cit., *Descubrir...*

<sup>22</sup> Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., Baptista Lucio, P., *Metodología de la investigación*, México: Mc Graw Hill, 1996.

<sup>23</sup> Delval, J., op. cit., *Descubrir...*

<sup>24</sup> Hernández Sampieri et al., op. cit.

<sup>25</sup> Seleccioné 8 de cada grado, pero durante el ciclo escolar tres alumnos se cambiaron de escuela, por lo que al final del trabajo de campo quedaron 21 sujetos. En los apartados siguientes haré referencia a las entrevistas realizadas en estas fechas como "exploración 1", "exploración 2" y "exploración 3", respectivamente.

transición de la transitividad de los números naturales a la transitividad de los números enteros, y estas transformaciones podían esperarse en los estudiantes de la secundaria, ya que el estudio de los números enteros forma parte del *currículum* de este nivel educativo. La población de la secundaria donde se hizo este estudio tenía un rango de edad entre los 11 y los 16 años en el turno matutino, pero los sujetos de la muestra tenían entre 12 y 15 años al iniciar el estudio.

Se partió de la hipótesis de que las operaciones suma y resta, y las ecuaciones (es decir, asociatividad, reversibilidad por inversión y transitividad de la igualdad) se construyen *paralelamente* a las relaciones de orden con enteros (transitividad de la desigualdad y reversibilidad por reciprocidad), cuando menos con las unidades simples, del -9 al +9, y la síntesis de estas operaciones y relaciones da como resultado la construcción del concepto de entero positivo y negativo.

La situación experimental consistió en el planteamiento oral de una serie de 8 problemas sobre números negativos, para observar lo que dicen y hacen los niños y adolescentes de la muestra al resolverlos; en una actividad con material concreto, consistente en hacer una correspondencia uno a uno entre 9 figuras geométricas con la misma forma pero diferente tamaño y 9 tarjetas con las leyendas "tengo 1", "tengo 2", "tengo 3", "tengo 4", "debo 1", "debo 2", "debo 3", "debo 4" y "no tengo y no debo" y en la entrevista clínica con contra argumentación por parte del experimentador.

En el trabajo de campo se utilizaron tres versiones de un mismo instrumento, con la intención de obtener datos cuyo análisis permitiera describir el proceso de construcción de la transitividad con números enteros, positivos y negativos, y se modificó el instrumento en función de los hallazgos hechos en cada etapa de esta investigación y de las consecuentes transformaciones de las hipótesis de trabajo.

La intención no era ajustar las hipótesis a los datos, sino construir un corpus comprensivo que describiera el proceso de construcción de la transitividad con números enteros positivos y negativos, *a partir de los datos*, en forma inductiva.

## 5. Modelo analítico

No se utilizó un modelo de análisis ya elaborado, sino que se construyó uno en forma inductiva, considerando como base el modelo de García,<sup>26</sup> quien distingue entre complejo cognoscitivo y sistema cognoscitivo. El complejo cognoscitivo consistió en los datos sin organizar obtenidos con las entrevistas, y el sistema cognoscitivo, en la organización que se hizo de este material para formar un sistema interpretativo sobre cómo los sujetos construyen el número entero en general, y la transitividad en particular.

El análisis pasó por dos niveles interpretativos:

Primer nivel. Análisis e interpretación del material empírico de base, en este caso, de las entrevistas que se aplicaron a los sujetos que participaron en esta investigación.

Segundo nivel. Construcción de principios teóricos, que dieron cuenta del proceso de construcción del número negativo, es decir, se formuló una descripción, con carácter hipotético, sobre la construcción el número entero, en general, y sobre la transitividad, en particular. Esto requirió que a partir del análisis efectuado en el primer nivel, se formulara un principio teórico, coherente con el material empírico de base, pero intentando despegarse de los hechos.

El análisis de datos requirió un modelo flexible que fue modificándose antes, durante y después del trabajo campo. Lo mismo ocurrió con las categorías analíticas. Después de

---

<sup>26</sup> García, R., op. cit.



la transcripción de las entrevistas, se separó lo que estaba relacionado con 2 organizadores generales: transitividad de la igualdad y transitividad de la desigualdad. Después, para cada una de las transitividades, se fragmentó la entrevista y se agrupó lo que estaba vinculado con los siguientes organizadores específicos:

- I. Relaciones de orden. En este organizador se agrupó lo relacionado con la forma como ordenaban enteros y el estatus del cero en esa relación.
- II. Operaciones y ecuaciones aditivas. En este organizador, lo relacionado a sumas, restas, ecuaciones donde la incógnita es un sumando y ecuaciones donde la incógnita es un sustraendo.
- III. Modelos. Se consideró a los modelos organizadores como representaciones mentales simples o complejas, que subyacen a una teoría (física, social, numérica, etc.), de acuerdo con Moreno Marimón.<sup>27</sup> En el caso de los números negativos, los modelos que utilizaron los alumnos para justificar una relación de orden fueron: situaciones concretas (como deudas y ganancias), operaciones, desplazamientos (como una recta numérica) y de neutralización (la unidad negativa anula a la positiva).
- IV. Abstracción y generalización. Se refiere a enunciados o “formas” que expresaban reglas, procedimientos, justificaciones, operaciones y relaciones, ya sean particulares o generales, con un contenido referido a una situación concreta o sin él.

Los 4 organizadores pertenecen a campos semánticos distintos: los dos primeros (relaciones de orden, operaciones y ecuaciones aditivas) se refieren al contenido matemático que investigué, por lo que son específicos de la transitividad y del número negativo, mientras que los últimos (modelos, abstracción y generalización) se refieren al proceso que siguen los sujetos, y son generales en la construcción del conocimiento.

A partir de este análisis se obtuvo el desempeño de cada uno de los 21 alumnos de la muestra: de cada protocolo se elaboró un reporte que incluye los 4 organizadores específicos, y en cada organizador, fragmentos de las respuestas de los entrevistados y una descripción de lo que el sujeto podía hacer, a partir de categorías que fueron surgiendo durante el análisis de datos y el desempeño del sujeto en cada categoría, (Tabla 1).

En la primera etapa de la investigación, la descripción del desempeño sólo permitía distinguir a los sujetos que podían resolver una situación problemática de aquéllos que no podían, sin embargo, a partir de los hallazgos fue desapareciendo esta dicotomía y aparecieron diversidad de descriptores del desempeño, tales como “resuelve componiendo dos operaciones”, “resuelve con una operación” y “resuelve pero no justifica”.

No fue posible separar completamente el contenido perteneciente a cada uno de los organizadores, ya que un mismo fragmento de la entrevista podía contener elementos que pertenecían a organizadores diferentes, y éstos a su vez, podían pertenecer a campos semánticos distintos (contenido matemático-construcción del conocimiento).

Posteriormente se hizo una tabla de cada uno de los organizadores, incluyendo a los 21 alumnos. Haciendo una lectura horizontal (desempeño *h, i, j, k...*), se identificó un nivel de desempeño, el cual se agregó en la última columna (Tabla 2).

*Tabla 1. Reporte individual.*

---

<sup>27</sup> Moreno Marimón, M., “Una teoría del cambio. Los modelos organizadores”. En M. Moreno, G. Sastre, M. Bovet y A. Leal, *Conocimiento y cambio. Los modelos organizadores en la construcción del conocimiento*, pp. 63-87, España: Paidós, 1998.

SUJETO: A	FECHA:
RELACIONES DE ORDEN (Viñetas)	DESCRIPCIÓN Categorías $a, b, c...$ Desempeño $a, b, c...$
OPERACIONES Y ECUACIONES (Viñetas)	DESCRIPCIÓN Categorías $h, i, j...$ Desempeño $h, i, j...$
MODELOS (Viñetas)	DESCRIPCIÓN Categorías $m, n, o...$ Desempeño $m, n, o...$
ABSTRACCIÓN Y GENERALIZACIÓN (Viñetas)	DESCRIPCIÓN Categorías $x, y, z...$ Desempeño $x, y, z...$

Tabla 2. Desempeño de la muestra en un organizador.

DESEMPEÑO DE LA MUESTRA EN OPERACIONES Y ECUACIONES. FECHA.			
SUJ.	Categoría $h$	Categoría $i$	Nivel
A	Desempeño $h$	Desempeño $i$	Nivel 1
B	Desempeño $h$	Desempeño $i$	Nivel 3
C	Desempeño $h$	Desempeño $i$	Nivel 2
...	...	...	...

Después se elaboró una tabla concentrando todos los organizadores específicos y el nivel de desempeño de los sujetos (Tabla 3) y se hizo un *retorno reflexivo*, esto es, se regresó a los organizadores generales, transitividad de la desigualdad y transitividad de la igualdad, para hacer una descripción de ambas transitividades, a través de los organizadores específicos, categorías, desempeños y niveles de desempeño, haciendo lecturas horizontales de un mismo sujeto y lecturas verticales entre sujetos.

Uno de los hallazgos de la primera etapa del trabajo de campo fue que los sujetos verbalizaban más cuando resolvían ecuaciones, lo que llevó a la hipótesis de que los sujetos resolvían tan rápidamente las operaciones directas que no se daban cuenta de cómo lo hacían; en cambio, las ecuaciones, por ser procesos inversos, implican mayor grado de dificultad, lo que les hacía tomar conciencia del proceso, y en la segunda etapa del trabajo de campo se incluyeron más reactivos de ecuaciones que de operaciones.

Asimismo, varios de los sujetos cambiaron la ordenación de los enteros *durante la entrevista*, por lo que en la segunda etapa se incluyeron actividades de ordenación en dos contextos diferentes, para observar qué tan sólida era su respuesta. Estos cambios en las hipótesis de trabajo, llevaron consigo cambios en las categorías analíticas y en los formatos de las tablas.

Se elaboraron tablas comparativas para cada uno de los organizadores, con los resultados de la primera y la segunda etapa (Tabla 4), registrando los cambios observados, y revisando las tablas de desempeño una y otra vez (Tabla 2), para hacer nuevas conjeturas y nuevas hipótesis.

Después del análisis de la segunda etapa de entrevistas se observó que los sujetos tenían retrocesos aparentes. Así, un sujeto que había tenido un nivel de desempeño 2 en la primera etapa, mostró un nivel 1 en la segunda; sin embargo, junto con las variaciones de nivel, también había variaciones en el contexto del problema, por lo que se consideró otra hipótesis de trabajo: los desempeños y los niveles de desempeño varían con el contexto. Esto llevó consigo modificaciones en las categorías analíticas y en los formatos de las tablas, en las que se hicieron especificaciones del contexto de la



situación problemática o actividad de correspondencia planteada a los alumnos (Tablas 5, 6 y 7).

*Tabla 3. Niveles de desempeño de la muestra.*

NIVELES DE DESEMPEÑO DE LA MUESTRA				
FECHA				
Suj	Relac orden	Operac Ecuac	Modelos	Abstracc gralizac.
A	Nivel	Nivel	Nivel	Nivel
B	Nivel	Nivel	Nivel	Nivel
C	Nivel	Nivel	Nivel	Nivel
D	Nivel	Nivel	Nivel	Nivel

*Tabla 4. Cambios en el desempeño de la muestra en un organizador.*

NIVEL DE DESEMPEÑO DE LA MUESTRA.			
FECHA			
Suj	FECHA	FECHA	CAMBIOS
	Operac Ecuac	Operac Ecuac	
A	Nivel	Nivel	
B	Nivel	Nivel	
C	Nivel	Nivel	
D	Nivel	Nivel	

Por último, como se elaboraron las tablas a partir de hipótesis y categorías distintas, no fue posible (ni pertinente) hacer una comparación entre las 3 etapas de manera directa, por lo que se hizo una comparación de elementos análogos, esto es, elementos de las tablas que podían ser comparables entre sí porque eran observaciones hechas a un mismo sujeto, y compartían el mismo contexto de situación problemática planteada a los alumnos y el mismo tipo de relación o de operación; por ejemplo, ecuaciones donde la incógnita es un sumando en el contexto de deudas y ganancias, en la segunda y la tercera etapa. O bien, situaciones problemáticas con el mismo tipo de relación o de operación, y en la misma etapa, pero en diferente contexto.

El análisis de datos permitió identificar tres niveles de desempeño en la construcción de la transitividad de la desigualdad: alteración, composición e integración, y niveles análogos para la transitividad de la igualdad. No se seleccionaron sujetos 'iniciales', 'intermedios' y 'avanzados', sino que fueron elegidos al azar, y después se les dio forma y sentido a los hallazgos.

¿Por qué tres exactamente? Se consideró que el objeto de estudio de esta investigación, la construcción de la transitividad con enteros negativos, implicaba cambios a lo largo del tiempo, y estos cambios se observaron en un momento incipiente de la construcción, o estado inicial; un momento de logro de la construcción, o estado final, y un momento de transición del estado inicial al estado final. Con base en lo detectado, se puede afirmar que siempre es posible describir cuando menos tres niveles de la transformación de un proceso cualquiera.

De acuerdo con la postura teórica que sustenta esta investigación, los tres niveles podrían estar vinculados con estadios, es decir, que fuera obligado el paso por cada uno de los niveles para la construcción de la transitividad, sin embargo, los alcances y límites de esta investigación no permiten afirmarlo; pero sí queda como una hipótesis de trabajo para posteriores investigaciones.

Tabla 5. Ficha individual.

SUJETO: X		FECHA:	
RELACIONES DE ORDEN viñetas contexto a viñetas contexto b	DESCRIPCIÓN CATEGORÍAS $a, b, c...$ Desempeño $a, b, c$ Desempeño $a', b', c'...$		
OPERACIONES Y ECUACIONES viñetas contexto a viñetas contexto b	DESCRIPCIÓN CATEGORÍAS $h, i, j...$ Desempeño $h, i, j...$ Desempeño $h', i', j'...$		
MODELOS viñetas contexto a viñetas contexto b	DESCRIPCIÓN CATEGORÍAS $m, n, o...$ Desempeño $m, n, o...$ Desempeño $m', n', o'...$		
ABSTRACCIÓN Y GENERALIZACIÓN viñetas contexto a viñetas contexto b	DESCRIPCIÓN CATEGORÍAS $x, y, z...$ Desempeño $x, y, z$ Desempeño $x', y', z'...$		

Tabla 6. Desempeño de la muestra en un organizador en diferentes contextos.

DESEMPEÑO DE LA MUESTRA EN OPERACIONES Y ECUACIONES						
FECHA						
SUJ	CONTEXTO A			CONTEXTO B		
	Categoría $h$	Categoría $i$	Nivel	Categoría	Categoría	Nivel
A	Desempeño $h$	Desempeño $i$	Nivel 2	Desempeño $h'$	Desempeño $i'$	Nivel 1
B	Desempeño $h$	Desempeño $i$	Nivel 3	Desempeño $h'$	Desempeño $i'$	Nivel 2
C	Desempeño $h$	Desempeño $i$	Nivel 1	Desempeño $h'$	Desempeño $i'$	Nivel 1

Tabla 7. Nivel de desempeño de la muestra en diferentes contextos.

NIVEL DE DESEMPEÑO DE LA MUESTRA.								FECHA
SUJETO	CONTEXTO A				CONTEXTO B			
	Relaciones	Operac/ Ecuac	Modelos	Abstrac / Gral.	Relaciones	Operac / Ecuac	Modelos	Abstrac/ Gral.
A	Nivel	Nivel	Nivel	Nivel	Nivel	Nivel	Nivel	Nivel
B	Nivel	Nivel	Nivel	Nivel	Nivel	Nivel	Nivel	Nivel
C	Nivel	Nivel	Nivel	Nivel	Nivel	Nivel	Nivel	Nivel
D	Nivel	Nivel	Nivel	Nivel	Nivel	Nivel	Nivel	Nivel

Los tres niveles de construcción de la transitividad se corresponden con los tres niveles propuestos por Piaget y García<sup>28</sup> para describir funcionalmente la construcción del conocimiento: 1) Nivel intraobjetal, durante el cual los sujetos analizan las características del objeto del conocimiento, pero sin establecer relaciones entre ellas. 2)

<sup>28</sup> Piaget y García, op.cit., *Psicogénesis e ...*

Nivel interobjetal, durante el cual el sujeto reconoce las relaciones y las transformaciones. 3) Y por último, nivel transobjetal, caracterizado por la constitución de la estructura de conjunto.

## 6. Confiabilidad y validez

Las siguientes características le confieren confiabilidad y validez al instrumento empleado en esta investigación:

Delval,<sup>29</sup> considera la posibilidad de hacer cambios en las entrevistas, pero sugiere no introducir demasiados cambios debido a que esto dificulta la comparación entre sujetos. En esta investigación se modificó el instrumento en las tres etapas de la investigación, sin embargo, sólo se compararon elementos análogos que sí podían ser comparados, por lo que las transformaciones observadas en los sujetos no se deben a los cambios realizados en el instrumento.

Los sujetos que participaron en esta investigación tuvieron diferentes desempeños en la actividad de correspondencia entre las figuras geométricas y las tarjetas, lo que es un indicador de que la actividad tiene un grado de complejidad que permite percibir o discriminar el desempeño de los sujetos, lo que además le da validez al instrumento. Análogamente, los sujetos presentaron diferentes desempeños en la resolución de las situaciones problemáticas y actividades de correspondencia planteadas.

Para dar cuenta de la transformación a lo largo del tiempo, se puede utilizar un diseño transversal con sujetos de diferentes edades, reconstruyendo el proceso con el supuesto de que los sujetos construyen la transitividad con enteros negativos a través de niveles consecutivos, lo que reduce el trabajo de campo a una etapa única; sin embargo, con un diseño *mixto* se ha podido reconstruir el proceso sin tener que recurrir a dicho supuesto.

Un indicador de que las diferencias de desempeño se debían al avance en la construcción del número entero es que había sujetos que, aunque estaban en algún nivel como "integración de la transitividad de la igualdad", tenían rasgos del nivel anterior, esto es, *las creencias no desaparecían abruptamente*, y se dieron varios casos de alumnos que mostraban rasgos de dos niveles contiguos; como una alumna, quien en la exploración 2 resolvió una situación problemática de dos formas: componiendo con dos operaciones y con una sola operación (integración).

Los alumnos progresaban en cada etapa, lo que era de esperarse dado que eran sujetos escolarizados y el contenido matemático que se investigó forma parte del *currículo* de la escuela secundaria, y esto da muestras de que el instrumento permite indagar si han ocurrido procesos de transformación. Además, de acuerdo con la postura teórica y el objetivo de esta investigación, era fundamental dar cuenta de cómo los sujetos pasaban de un estado de conocimiento a otro estado más avanzado, y se presentan los hallazgos correspondientes. Además, se presenta una descripción del trabajo analítico, lo que permite que los lectores puedan reconstruir el procedimiento utilizado en esta investigación.

Lo fundamental es que el instrumento "mida lo que pretende medir", sin que esto implique datos cuantitativos, sino que sea un instrumento que permita dar cuenta del fragmento de la realidad que se pretende conocer. Una crítica que podría hacerse es con respecto a lo abierto de algunas situaciones problemáticas, lo que permitía que algunos sujetos dieran respuestas iniciales como "Así califica el maestro de Historia", "Portándome bien", "Hay cambios en el clima", sin embargo, era suficiente hacerles otra pregunta para que expresaran enunciados que reflejaban su construcción del número

---

<sup>29</sup> Delval, J ., op. cit., *Descubrir...*

entero, tales como “¿Cómo?”, “¿Por qué?” y, la que ayuda a que los sujetos continúen hablando sin sugerirles una respuesta, “¿Y?”. La mayoría de las preguntas podían ser contestadas con múltiples respuestas, lo que es necesario en una entrevista clínica, esto es, hay que hacer preguntas que ubiquen a los sujetos en una parcela de la realidad, pero que no los obliguen a dar determinada respuesta.

De acuerdo a la postura epistemológica y teórica de esta investigación, la confiabilidad de un sistema cognoscitivo no depende de cada afirmación, sino de la consistencia del sistema que se ha construido. Y lo más importante: el objetivo de esta investigación no era *demostrar o generalizar*, sino describir cómo los niños y adolescentes construyen la transitividad con números enteros en el contexto de la escuela secundaria, dentro de los límites y alcances que impone el tipo de estudio y el tamaño de la muestra.

## 7. Hallazgos

Los diversos desempeños y avances en las tres etapas de la investigación que presentaron los sujetos sugieren una secuencia constructiva de las operaciones aditivas, sin ser lineal: A) Suma de números enteros, y restas sólo en el caso particular de 2 enteros,  $(-a)-(-b)$ , tal que  $a > b$ .<sup>30</sup> B) Ecuaciones donde la incógnita es un sumando y restas con el sustraendo mayor que el minuendo,  $(+a)-(+b)$ , tal que  $a < b$ , y C) Restas con doble inversión del número,  $(+a)-(-b)=+c$ , y ecuaciones donde la incógnita es un sustraendo.<sup>31</sup>

Además, la forma como pasan de no resolver a resolver ecuaciones es mediante el procedimiento de componer la respuesta con dos operaciones, primero sin considerar al cero como punto de referencia, después considerándolo.

De acuerdo con las transformaciones mostradas por los sujetos de la muestra, la ordenación de enteros pasa por 3 momentos. Primero ordenan por parejas, ya sea +1, -1, +2, -2... ó -1, +1, -2, +2...; posteriormente separando enteros +1, +2, +3, -1, -2, -3 ó -1, -2, -3..., +1, +2, +3, y por último, ordenan simétricamente: ...-3, -2, -1, +1, +2, +3... La evidencia a favor es que los alumnos que presentaron cambios en la ordenación de enteros lo hicieron en esta secuencia constructiva.

Se reconsideró el término paralelismo, que inicialmente se había definido como “avance correlacionado y simultáneo”, y se redefinió como “avance correlacionado pero no simultáneo”, debido a los desfases observados en la construcción de las operaciones aditivas y las relaciones de orden. Sin embargo, la correlación se manifestó en lo siguiente:

- a. Hay una construcción progresiva de las relaciones de orden y operaciones y ecuaciones aditivas con enteros, es decir, no hay una secuencia primero relaciones de orden, después operaciones y ecuaciones.
- b. Los sujetos justifican las relaciones de orden con operaciones aditivas.
- c. El cero relativo juega un rol importante en la resolución de ecuaciones, en particular donde la incógnita es un sustraendo.
- d. Hay desfases en la construcción de las operaciones aditivas, las relaciones de orden y el estatus del cero, pero en su más alto nivel de desempeño tienden a converger en los sujetos que muestran mayor avance en todos los contextos de las situaciones problemáticas.

Dado que la transitividad de la igualdad y la desigualdad son elementos del número entero, se esperaba encontrar otro paralelismo constructivo de ambas transitividades.

<sup>30</sup> Durante las entrevistas no utilicé operaciones, sino situaciones problemáticas concretas y orales.

<sup>31</sup> En todos los casos, con  $a$ ,  $b$  y  $c$ , me refiero a enteros positivos, y con  $-a$ ,  $-b$  y  $-c$ , a enteros negativos.

Los hallazgos permiten afirmar, a manera de hipótesis, que sí hay un paralelismo análogo al de las operaciones y relaciones de orden, y que se trata de procesos no simultáneos. Esta afirmación equivale a decir que no hay una secuencia “primero transitividad de la desigualdad, después transitividad de la igualdad”, sino que ambas transitividades se van construyendo gradualmente, y que la culminación de ambas (integración del orden, en el caso de la desigualdad; integración en una operación, en el caso de la igualdad) no se da al mismo tiempo, puede ser que primero logren una de las dos transitividades. Además, se identificaron tres niveles constructivos para la transitividad de la desigualdad y la igualdad (Figura 1):

Un primer nivel llamado “alteración”, consistente en que los sujetos incorporan los enteros negativos, pero los someten a las mismas reglas que a los números naturales. Con el término alteración se hace referencia al hecho de que los sujetos alteran el signo de los números o del operador, pero no ambos, y aplican la transitividad aún en el dominio de los números naturales, por ejemplo: “ $(+5)+(-2)=(+5)+(+2)$  y  $(+5)+(+2)=(+7)$  entonces  $(+5)+(-2)=+7$ ”. Ordenan por parejas de enteros (+1, -1, +2, -2... ó -1, +1, -2, +2...), reconociendo un valor diferente para los enteros negativos, pero en forma cualitativa y particular, a cada número lo consideran menor (o mayor) que su simétrico.

Un segundo nivel llamado “composición”, que es cuando los sujetos además de incorporar los enteros negativos, comienzan a operar con ellos reconociéndolos como diferentes a los números positivos, pero necesitan componer sus soluciones con dos operaciones, en particular, cuando resuelven ecuaciones o procesos inversos, por ejemplo, la ecuación  $(-4)+(\_) = +5$ , la resuelven sin considerar al cero como punto de referencia: “ $(+5)+(-4)=+1$ ,  $(+1)+(+4)=(+5)$  entonces  $(-4)+(+5)+(+4)=+5$  y  $(+5)+(+4)=+9$ ”, o bien, considerando al cero como punto de referencia “ $(-4)+(+4)=0$  y  $0+(+5)=+5$  entonces  $(-4)+(+4)+(+5)=+5$  y  $(+4)+(+5)=+9$ ”. Ordenan separando enteros (-1, -2, -3, +1, +2, +3... ó +1, +2, +3, -1, -2, -3...), y el valor diferente para los enteros negativos se ha generalizado, todos los enteros negativos son menores (o mayores) que los positivos, pero aún no se ha cuantificado esta relación.

Un tercer nivel llamado “integración”, que se caracteriza porque los sujetos logran resolver ecuaciones con una sola operación y aplican la transitividad en el dominio de los enteros positivos y negativos. Ordenan en forma simétrica (-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3...), y se ha cuantificado el valor diferente de los negativos, además de haberse generalizado (todos los negativos son menores que los positivos), por lo que aceptan que -3 es el inverso aditivo o simétrico de +3, esto implica que aceptan que -3 es menor que +3, que todos los negativos son menores que +3 y que -3 y +3 tienen el mismo número de unidades, pero con diferente valor relativo. Es cuando los sujetos aceptan que si  $A=B$  y  $B=C$  entonces  $A=C$ , y que si  $A<B$  y  $B<C$  entonces  $A<C$  en el caso de que  $A$ ,  $B$  y  $C$  sean números enteros, positivos y negativos.

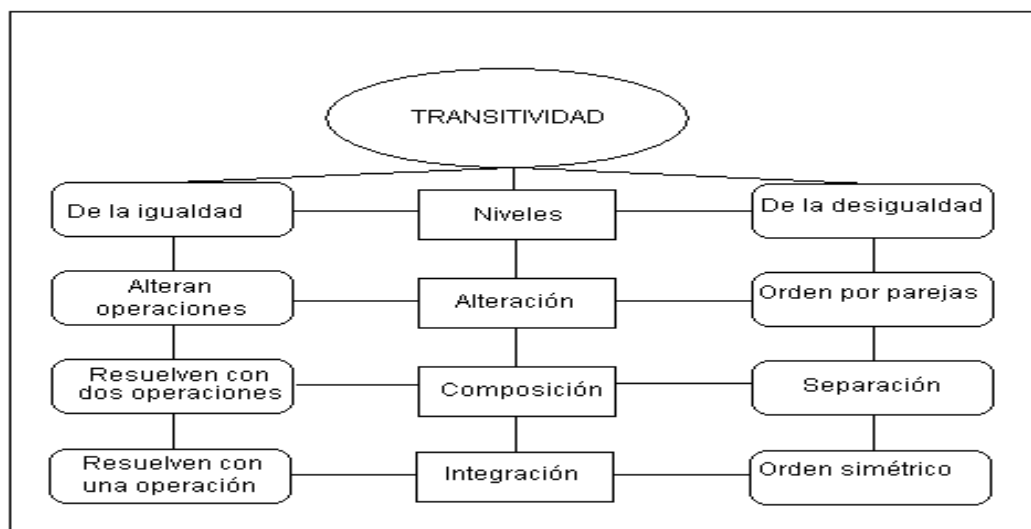


Figura 1. Niveles de construcción de la transitividad.

El estatus del cero como absoluto, como el mayor de los números o como relativo, también juega un rol importante en la construcción de la transitividad. Se esperaba una relación entre los progresos de la transitividad y el estatus del cero, sin embargo, no fue así. Pueden darse casos como los siguientes: que un alumno ordene separando enteros, pero siga considerando un cero absoluto:  $0... -1, -2, -3..., +1, +2, +3...$ , o bien, que lo considere el mayor de los números:  $... -1, -2, -3..., +1, +2, +3..., 0$ . Sin embargo, se observó en los sujetos más avanzados una tendencia a ordenar en forma simétrica con cero relativo:  $-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3...$

A partir de los hallazgos de la investigación, se descubrió lo siguiente: cuando un alumno ordena por parejas  $-1, +1, -2, +2, -3, +3...0$ , y coloca al cero en el lugar del mayor, es matemáticamente incorrecto, pero es un avance con respecto a ordenar  $0, -1, +1, -2, +2...$ , ya que implica una movilidad de pensamiento. La movilidad se debe a que pueden sumar enteros positivos y negativos, cuando menos en contextos específicos; el orden está construido con la suma de simétricos:  $(-1) + (+1) = 0$ ,  $(-2) + (+2) = 0$ ,  $(-3) + (+3) = 0...$  Los sujetos colocan el cero al final, de menor a mayor, porque es el resultado de las sumas anteriores.

Se obtuvieron hallazgos que contradicen parcialmente lo expuesto por Beth y Piaget<sup>32</sup> con respecto al avance simultáneo de la seriación, la clasificación y la conservación del número natural. En esta investigación, se observó que los desfases son la norma y los avances en fase de todos los elementos o aspectos del número entero son la excepción, es decir, un mismo sujeto, en situaciones problemáticas en el mismo contexto, puede presentar mayor avance en relaciones de orden que en operaciones, o al contrario.

En el caso de que la exigencia de la necesidad y la confianza en las reglas fueran necesarias para la construcción del número entero, permitirían que los sujetos acepten soluciones con enteros positivos y negativos que no están dadas por sus experiencias, sin embargo, lo que se encontró es que los sujetos resuelven las situaciones problemáticas más cercanas a su entorno y experiencias (calificaciones, deudas y ganancias). A partir de los hallazgos se puede afirmar que un primer nivel de equilibrio en la construcción del número entero se da cuando los sujetos pueden resolver situaciones problemáticas que requieren para su solución relaciones de orden con cero relativo y operaciones y ecuaciones aditivas, en diversidad de contextos y con unidades

<sup>32</sup> Beth, E., Piaget, J., *Epistemología matemática y psicología. Relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real*, 2ª ed., España: Crítica, 1980.

del -9 al +9; dentro de este proceso los sujetos pasan por una secuencia de desempeño en la que se manifiesta la construcción de la transitividad de la igualdad y la desigualdad: alteración, composición e integración. A este primer nivel de equilibrio se le llamó "concepto de número entero". Otros elementos que intervienen en este proceso evolutivo son (Figura 2):

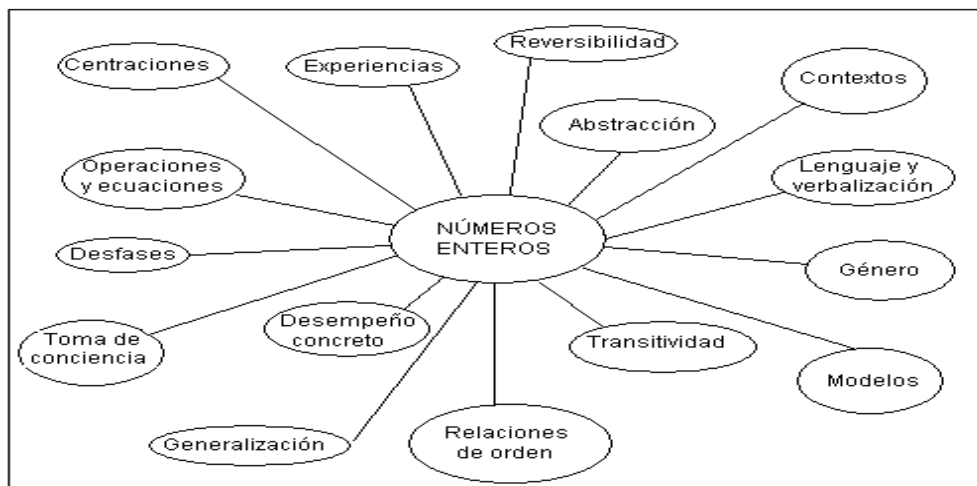


Figura 2. Elementos que intervienen en la construcción del número entero. Dimensión cognitiva.

a) El lenguaje y la verbalización. Los sujetos verbalizan más ante un problema que exige un proceso inverso que ante uno directo, esto es, no suelen dar explicaciones sobre cómo resuelven una suma, y verbalizan más cuando resuelven ecuaciones.

b) Las experiencias del sujeto en cada contexto de la situación problemática que tiene que resolver. En el caso de los sujetos que participaron en esta investigación, los contextos que les resultan más accesibles son "calificaciones" y "deudas y ganancias", y los menos accesibles, "tiempo" y "temperaturas", y los sujetos que se encuentran en el tercer nivel de construcción del número entero ya han generalizado los contextos. De acuerdo con varias investigaciones<sup>33</sup> este diferente desempeño en cada contexto se da en los sujetos de todos los niveles educativos y en todos los contenidos de las matemáticas, y no se debe a dificultades cognitivas sino a la *especialización del conocimiento* debido a la experiencia.

<sup>33</sup> a) Castro, E., Rico, L., Castro E., *Estructuras aritméticas elementales y su modelización*, Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995.

b) Saiz, I., "Dividir con dificultad o la dificultad de dividir.", en C. Parra e I. Saiz (Comp.), *Didáctica de las matemáticas, aportes y reflexiones*, pp. 185-217, Argentina: Paidós Educador, 1994.

c) Hoyos, V., "Un estudio exploratorio sobre la asignación de sentido a las representaciones básicas de la variación, al término de la primaria y el inicio de la secundaria", en *Educación Matemática*, Vol. 6, N° 3, pp. 65-81, México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1994.

d) Ojeda, A. M., "Contextos, representaciones y la idea de probabilidad condicional", en F. Hitt Espinoza (Edit.), *Investigaciones en matemática educativa*, (pp. 291-310). México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1996.

e) Sánchez, E., Hernández, R., "Análisis de resultados de un cuestionario sobre la regla del producto en probabilidad, aplicado a estudiantes de bachillerato y primer año profesional", en *Memorias del VII Simposio Internacional en Educación Matemática Elfriede Wenzelburger*, UPN (pp. 152-158). Cd. de México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1999.

f) Waldegg, G., De Agüero, M., "Habilidades cognoscitivas y esquemas de razonamiento en estudiantes universitarios", en *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, Vol. 4, N° 8, pp. 203-244, 1999.

g) Valiente, S., "Análisis de 4 algoritmos operatorios en investigación de campo con adultos analfabetas", en *Educación Matemática*, Vol. 7, N° 2, pp. 60-73. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995.

h) Bruno, A. y Espinel, M. C., op. cit.

i) Gallardo, A., op. cit., "El paradigma..."



c) El desempeño de los adolescentes al nivel de las operaciones concretas ante un conocimiento nuevo. Se encontró en los adolescentes un anclaje en lo concreto, del que les cuesta trabajo desprenderse, y dificultades para generalizar los contextos de construcción del número entero. No se concuerda con la postura de Inhelder y Piaget,<sup>34</sup> quienes explican esto con la tesis de que los sujetos no han pasado a la etapa de las operaciones formales, que son las únicas que pueden abstraerse de su contenido, y se acepta la postura de Delval<sup>35</sup> y Ausubel et al.,<sup>36</sup> quienes consideran que los sujetos que se encuentran en las operaciones formales presentan desempeño concreto ante un conocimiento nuevo. Se reconoce que algunos de los sujetos más avanzados presentaron rasgos del pensamiento formal (la exigencia de la necesidad y la confianza en las reglas), y se pretende continuar en esta línea de investigación en estudios posteriores.

d) La toma de conciencia y la reversibilidad. Se encontró un desfase (rezago) de la toma de conciencia de las operaciones y relaciones de orden con respecto a lo que los sujetos pueden hacer con acciones físicas (la actividad de poner en correspondencia las tarjetas con las figuras geométricas) o mentales (la resolución de los problemas), además de que la toma de conciencia se encuentra ligada a la reversibilidad del número, observada en la resolución de ecuaciones. Claparède<sup>37</sup> y Vygotski<sup>38</sup> consideraban que dado un proceso de construcción del conocimiento  $A, B, C$ , la toma de conciencia es  $C, B, A$ ; los hallazgos de esta investigación están más próximos a la tesis de Piaget,<sup>39</sup> y se considera lo siguiente: la toma de conciencia surge de los procesos inversos, haya conflicto cognitivo o no lo haya, y el orden de la toma de conciencia es el mismo  $A, B, C$ , pero con desfase, esto es, con rezago con respecto a la construcción del número entero. Piaget consideró que esto se debe a que la toma de conciencia no es contemporánea de la construcción misma, y los hallazgos de esta investigación dan elementos para considerar que se debe a que la toma de conciencia es otro proceso en la construcción del número entero, de la que ya había observado que los desfases son la norma, y a que los sujetos verbalizan menos de lo pueden hacer con acciones físicas y mentales.

e) La evolución de los modelos, de concretos a más abstractos. Se inició esta investigación con la hipótesis de que los sujetos abandonarían modelos de desplazamiento y de neutralización para justificar relaciones de orden con operaciones y operaciones con relaciones de orden. Los hallazgos difieren bastante. En primer lugar, la secuencia constructiva muestra que los sujetos que participaron en esta investigación pasaban de modelos referidos a situaciones concretas a operaciones y después a desplazamientos y neutralización, sin abandonar las situaciones concretas, por lo que parece que los modelos de desplazamiento y neutralización son un conocimiento más avanzado que las operaciones, cuando menos en el contexto escolar. En segundo lugar, se observó que había sujetos que justificaban relaciones de orden con operaciones y operaciones con relaciones de orden, desde una etapa intermedia en la construcción del número entero.

f) La centración del sujeto en determinados aspectos del número entero. Los sujetos se centran en las operaciones o relaciones de orden, y posteriormente las integran en un sistema que permite la conceptualización del número negativo, que se manifiesta en el uso de modelos más abstractos, como operaciones, desplazamientos y neutralización.

---

<sup>34</sup> Inhelder, B., Piaget, J., *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*, España: Paidós, 1996.

<sup>35</sup> Delval, J., op. cit., *Crece y pensar...*

<sup>36</sup> Ausubel, D. P., Novak, J. D., Hanesian, H., *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*, 2ª ed., México: Trillas, 2001.

<sup>37</sup> Citado por Vygotski, L. S., *Pensamiento y lenguaje*, La Habana: Pueblo y Educación, pp. 55-56, 1998.

<sup>38</sup> *Ibíd.*

<sup>39</sup> a) Piaget, J., *El mecanismo del desarrollo mental*, (J. Delval, Edit), Madrid: Editora Nacional, 1975.

b) Piaget, J., *La toma de conciencia*, 3ª ed., Madrid: Morata, 1985.

Los modelos organizadores de Moreno Marimón<sup>40</sup> explican el hecho de que los sujetos avancen más en operaciones que en relaciones de orden, o al contrario, ya que los sujetos se centran en determinado aspecto, y les resulta difícil considerar simultáneamente todas las centraciones.

g) La abstracción. Los sujetos abstraen las propiedades de los enteros a partir de diferenciaciones progresivas de las operaciones y relaciones de orden, esto es, los diferentes casos de sumas, restas, el orden entre enteros y el cero. En particular, el proceso de abstracción (diferenciación) de los diferentes casos de restas y de la doble inversión del número entero, hasta que el sujeto logra generalizarlos (integrarlos) en una sola operación. Y la reversibilidad necesaria para resolver ecuaciones (inversión) y para relaciones de orden (reciprocidad).

h) La generalización. A partir de las abstracciones anteriores, que se manifiesta por la constitución de la estructura de *grupo* de los enteros y las relaciones de orden simétricas, los sujetos generalizan las propiedades de los enteros. Los diferentes elementos del número entero: operaciones, ecuaciones, relaciones de orden, transitividad y estatus del cero, pasan por tres niveles constructivos en el nivel de las unidades simples, con desfases; es necesario que los sujetos hayan generalizado los contextos en los que pueden resolver situaciones problemáticas, y su síntesis es lo que se llamó concepto de número entero, que tendrá que generalizarse en decenas, centenas, unidades de millar, centenas de millar.

i) El género. Los hombres presentaron mejor desempeño en el contexto de temperaturas, y esto se explica, al menos parcialmente, con lo que Ausubel et al.<sup>41</sup> (2001) llaman patrones diferenciales de experiencia, por lo que la construcción del número entero, en general, y de la transitividad, en particular, no es igual para todos los sujetos.

## 8. Limitaciones y aportes

El tipo de estudio, cualitativo y descriptivo, y el tamaño de la muestra no permite generalizar a otras poblaciones y contextos, por lo que es necesario continuar la investigación con muestras mayores y estudios cuantitativos.

Uno de los hallazgos de esta investigación es que algunos sujetos mostraron la exigencia de la necesidad y la confianza en las reglas al resolver situaciones problemáticas con números enteros, por lo que hay indicios de que sean necesarias las operaciones formales para la construcción del número entero, sin embargo, no se hizo una evaluación sistemática de este aspecto. Asimismo, surgieron otras cuestiones no contempladas al inicio de esta investigación, como la evaluación del lenguaje. Los sujetos verbalizaron más cuando resolvían ecuaciones, pero en estudios posteriores tendría que hacerse una evaluación rigurosa de la verbalización y el lenguaje.

Esta investigación no abarca el problema en su conjunto, hay otros aspectos de la construcción del número no investigados, tales como la asociatividad, la interacción entre iguales y la afectividad. Otra limitante es que únicamente hubo una entrevistadora, por lo tanto una sola forma de percepción de los hallazgos.

Esta investigación aporta un modelo analítico, construido en forma inductiva, que permite valorar el desempeño de los sujetos en operaciones aditivas y relaciones de

---

<sup>40</sup> a) Moreno Marimón, M., "El conocimiento del cambio". En M. Moreno, G. Sastre, M. Bovet y A. Leal, *Conocimiento y cambio. Los modelos organizadores en la construcción del conocimiento*, pp. 317-337, España: Paidós, 1998.

b) Moreno Marimón, M., op. cit., "Una teoría del cambio..."

<sup>41</sup> Ausubel, D. P., Novak, J. D., Hanesian, H., op. cit.

orden, en diferentes contextos de la situación problemática; la identificación y descripción de tres niveles de desempeño en la construcción de la transitividad de la igualdad y la desigualdad con enteros; la descripción de una secuencia progresiva en la evolución de los modelos que utilizan los sujetos cuando resuelven situaciones problemáticas que requieren números enteros para su resolución; el paralelismo en la construcción de operaciones aditivas y relaciones de orden, paralelismo entendido como avance correlacionado, pero no simultáneo; el desfase en el avance de los diferentes elementos que intervienen en la construcción del entero: operaciones aditivas, relaciones de orden, modelos, abstracción, generalización y la transitividad de la igualdad y la desigualdad; la descripción del proceso de abstracción de sumas, restas, ecuaciones y relaciones de orden y su generalización, evidenciada con la resolución de ecuaciones aditivas y el establecimiento de relaciones de orden simétricas, y elementos para continuar el debate teórico con respecto a la toma de conciencia y la naturaleza concreta o formal de la construcción del número entero.

En esta investigación hay evidencias de que los sujetos construyen las operaciones aditivas y las relaciones de orden en forma paralela, por lo que tendrían que reconsiderarse los planes y programas oficiales de las matemáticas en la escuela secundaria, que presentan una secuencia “primero el orden, después las operaciones”.

La construcción de los números enteros es un conocimiento previo indispensable para el estudio de temas más avanzados, como ecuaciones algebraicas y operaciones con polinomios, por lo que esta investigación representa un eslabón teórico entre la aritmética que se enseña en la escuela primaria y el álgebra de la secundaria.

En las propuestas pedagógicas presentadas en el estado del conocimiento se privilegia uno de dos modelos para la enseñanza del número entero: como desplazamiento o como neutralización, y los hallazgos de esta investigación sugieren que es necesario iniciar la enseñanza con situaciones concretas en un contexto particular hasta lograr la consolidación del proceso, ampliarse a otros contextos, y continuar con una complementariedad de modelos: operaciones, desplazamientos y neutralización; además, los hallazgos sugieren una enseñanza oral del número entero, cuando menos en el primer grado de secundaria.

Otro aporte es un modelo de evaluación para los números enteros, a partir del modelo analítico de esta investigación, que sugiere considerar el contexto específico de la situación problemática y el nivel de construcción de operaciones aditivas, relaciones del orden, el estatus del cero y la transitividad de la igualdad y la desigualdad.

## 9. Conclusiones

En el contexto de la escuela secundaria, los sujetos muestran la secuencia de desempeño alteración, composición e integración, que permite inferir cómo evolucionan en su construcción de la transitividad de la desigualdad y de la igualdad; esta construcción está correlacionada con secuencias progresivas en la evolución de las operaciones aditivas y las relaciones de orden con unidades del -9 al +9, el estatus del cero, la abstracción y la generalización, y los modelos, que comienzan en situaciones concretas, pasan a operaciones y culminan con desplazamientos y neutralización; hay desfases en los diferentes elementos que intervienen en la construcción de los enteros.

El nivel alteración consiste en que los sujetos incorporan a los negativos, pero los someten a las mismas reglas que a los números naturales; el nivel composición se da cuando los sujetos además de incorporar los enteros negativos, comienzan a operar con ellos reconociéndolos como diferentes a los números positivos, pero necesitan componer sus soluciones con dos operaciones o dos relaciones de orden, y el nivel integración se da cuando logran resolver ecuaciones con una sola operación y aceptan la relación de

orden simétrica de los enteros. En este momento es cuando logran aplicar la transitividad en el dominio de los enteros positivos y negativos.

No se encontraron sujetos que no puedan hacer algo, sino sujetos que no han tenido las experiencias necesarias y la atención para construir la transitividad con los mismos números; no se encontró lo que Eva Cid<sup>42</sup> llama obstáculos epistemológicos, esto es, creencias antiguas que se manifiestan a través de errores sistemáticos y que el sujeto se resiste a cambiar por una nueva creencia. Esto es, si los sujetos no se encuentran en condiciones excepcionalmente desfavorables, pueden construir el concepto de número entero positivo y negativo.

---

<sup>42</sup> Cid, E., op. cit.