

Comparación de Motores Brownianos Basados en Cambios Morfológicos y en Potenciales de Sierra Intermitentes

Francisco Ambía

Abstract—Los motores brownianos son sistemas de enorme interés, capaces de desarrollar trabajo útil a partir de las fluctuaciones térmicas. En este artículo contrastamos dos clases de motores brownianos distintos, cuya función es transportar partículas en una dirección preferencial. El primero es un modelo que nosotros proponemos, formado por dos esferas acopladas por un potencial armónico que por medio de pequeños cambios morfológicos logra rectificar el movimiento browniano en un sentido. El segundo es un modelo que ha sido ampliamente estudiado en el campo, que consiste de un potencial periódico, asimétrico, cuya amplitud varía con respecto al tiempo. El estudio fue hecho tanto de manera teórica como con simulaciones de dinámica browniana. Los resultados obtenidos permiten concluir que el mecanismo de rectificación basado en adaptaciones de la forma puede competir, e incluso superar, al basado en la aplicación de potenciales externos.

I. INTRODUCCIÓN

En las décadas recientes, los sistemas conocidos bajo el nombre de máquinas moleculares han sido de enorme interés en los campos de la biología, la física y las nanociencias [1]. Estos sistemas son estructuras moleculares sofisticadas, desarrolladas por el proceso evolutivo, capaces de realizar trabajo y útil especializado a una temperatura cercana a del ambiente y en escalas espaciales que van de los 10 nm, hasta alrededor de 1 μ m. En tales condiciones, la dinámica de los sistemas microscópicos ordinarios está dominada por el ruido térmico. Sorprendentemente, las máquinas moleculares no solamente operan en ambientes altamente ruidosos, sino que cuentan con mecanismos de trinquete que les permiten sesgar los efectos del ruido térmico y aprovecharlos a su favor [9]. Entre las máquinas moleculares naturales más estudiadas se encuentran las kinésicas que ejecutan caminatas estocásticas por el cito esqueleto propulsadas por hidrólisis de ATP [6], [5] y la ATP sintasa [7], [8], que es esencialmente una máquina rotatoria microscópica encargada de la síntesis de ATP.

Desde el punto de vista de la física, las máquinas moleculares son ejemplos de los así llamados motores brownianos, que son todos aquellos sistemas que, inmersos en un ambiente de equilibrio, pueden obtener movimiento dirigido utilizando las fluctuaciones térmicas, sin violar la segunda ley de la termodinámica. En efecto, según esta ley, la entropía de un sistema aislado siempre aumenta, consecuentemente, en

un fluido que ha alcanzado su estado de entropía máxima (Equilibrio térmico) no puede existir un flujo neto de partículas Brownianas. Sin embargo, el transporte de partículas brownianas es posible si la dinámica del motor está sujeta a la ruptura de las simetrías espacial y temporal. Hoy en día se sabe que son precisamente los mecanismos de trinquete quienes dan lugar a la ruptura de las simetrías y permiten que las máquinas operen fuera de equilibrio, en estados donde la ley de balance detallado no es aplicable [4]. Además, sistemas de control inteligentes pueden hacer el transporte de partículas en equilibrio posible. Un ejemplo de dicho sistema podría ser el llamado demonio de Maxwell, que tiene la capacidad de medir el estado de moléculas individuales, a costa de generar entropía por la eliminación de la información almacenada [3].

El entender cómo funcionan las máquinas moleculares podría conducir en el futuro a la construcción de motores brownianos artificiales con aplicaciones importantes en el área médica. Por ejemplo, se prevé que sería posible manufacturar motores moleculares para el suministro dirigido de medicamentos o para el bombeo de nutrientes y desechos hacia el interior y exterior de las células.

El propósito del presente trabajo consiste en analizar la dinámica de un motor browniano recientemente propuesto en la Refs. [10], [11]. Este motor opera bajo un sistema de control tipo demonio de Maxwell que promueve cambios en la adaptación de su morfología. El desempeño de este motor se estudiará en comparación con el de un motor browniano clásico que funcionan mediante la aplicación de fuerzas asimétricas, periódicas e intermitentes. El análisis se llevará a cabo utilizando simulaciones de dinámica browniana. La principal conclusión que se deriva a partir de éstas es que, aún bajo adaptaciones morfológicas pequeñas, nuestro modelo es capaz de inducir un mayor flujo de partículas, que el modelo clásico.

II. MODELOS DE MOTORES BROWNIANOS

A. Motor basado en adaptaciones morfológicas

Retomaremos el algoritmo de operación del motor browniano como presentamos en [10]. Consideramos un sistema de dos masas acopladas por un resorte de constante k y longitud natural l , tal como el que se muestra esquemáticamente en la figura 1. La viscosidad del fluido en la que estará inmerso el nadador es γ . La masa de ambas partículas se considerará igual a m . Las variables de estado que elegimos para el nadador son

x_{cm} y x_r , con

$$x_{cm} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$x_r = x_2 - x_1$$

siendo x_2 y x_1 las posiciones de cada partícula, x_{cm} la posición del centro de masa y x_r la elongación del resorte que las une.

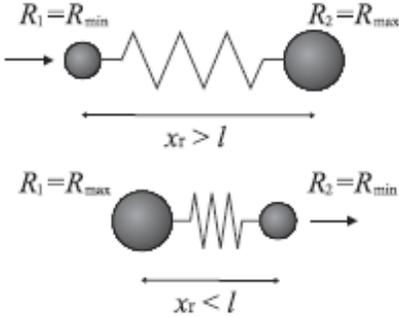


Fig. 1. Motor browniano operando bajo el mecanismo de cambios morfológicos.

Los radios de cada partícula R_1 y R_2 adaptan su valor entre R_{max} y R_{min} dependiendo la variable de x_r , específicamente, si $x_r > l$, entonces:

$$R_1(t) = R_1(t_p) e^{-\zeta(t-t_p)} + R_{min} (1 - e^{-\zeta(t-t_p)}),$$

$$R_2(t) = R_2(t_p) e^{-\zeta(t-t_p)} + R_{max} (1 - e^{-\zeta(t-t_p)});$$

mientras que si $x_r < l$, entonces:

$$R_1(t) = R_1(t_p) e^{-\zeta(t-t_p)} + R_{max} (1 - e^{-\zeta(t-t_p)}),$$

$$R_2(t) = R_2(t_p) e^{-\zeta(t-t_p)} + R_{min} (1 - e^{-\zeta(t-t_p)}).$$

Definimos el cambio de radios de esta forma porque así logramos que sea continuo. Al tiempo t_p los radios tomarán un valor inicial y si evolucionamos el sistema al tiempo posterior t_{p+1} , tendremos los radios finales. Las ecuaciones diferenciales que gobiernan la dinámica del nadador son:

$$\frac{dx_{cm}}{dt} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\omega^2}{\beta_2} - \frac{\omega^2}{\beta_1} \right) (x_r - l) + \frac{1}{8\pi x_r^2} (\dot{V}_1 - \dot{V}_2) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta_1} A_1 + \frac{1}{\beta_2} A_2 \right), \quad (1)$$

$$\frac{dx_r}{dt} = -\left(\frac{\omega^2}{\beta_1} + \frac{\omega^2}{\beta_2} \right) (x_r - l) + \frac{1}{4\pi x_r^2} (\dot{V}_1 + \dot{V}_2) + \frac{1}{\beta_2} A_2 - \frac{1}{\beta_1} A_1, \quad (2)$$

en donde $\omega^2 = k/m$, y $\beta_i = 6\pi\eta R_i$, para $i = 1, 2$.

Estas ecuaciones se obtuvieron bajo la consideración de números de Reynolds pequeños. En ese caso, los efectos de la inercia son despreciados porque las fuerzas de fricción son varios órdenes de magnitud más intensas. El mecanismo que promueve el movimiento dirigido consiste en usar las fuerzas de fricción a nuestro favor cambiando el radio y as también la fuerza de fricción que siente cada partícula, porque la fuerza aumenta si el radio es más grande.

Como vemos en las ecuaciones del cambio de radios hacemos que R_2 tienda a R_{max} si $x_r > l$, hacemos que la partícula 2 actúe como ancla cuando el sistema está elongado, por otro lado si $x_r < l$ hacemos que R_1 tienda a R_{max} si el sistema está comprimido, de esta forma hacemos que el sistema siempre se mueva a la derecha. Obsérvese también que existen fuerzas de succión y repulsión debidas al cambio de radios. Esto es, al crecer una partícula el fluido a su alrededor empuja a la otra, mientras que al contraerse el fluido la succiona. Estas fuerzas dependen de \dot{V}_1 y \dot{V}_2 que representan la velocidad a la que cambia el volumen de cada esfera. A_1 y A_2 son fuerzas estocásticas, debidas al bombardeo molecular. Como es usual, se asumirá que éstas no tienen memoria y que su distribución es una gaussiana, cuya desviación estándar aumenta con la temperatura [2]. Debido a que las fuerzas son gaussianas y markovianas, la solución de estas ecuaciones da como resultado una distribución normal [10], [11]. e manera precisa, es posible demostrar, bajo la suposición de que los cambios morfológicos son pequeños y lentos, que la probabilidad de encontrar al motor browniano en la posición x_{cm} (t) al tiempo t, dado que comenzó en la posición x_{cm} (0) al tiempo 0, es

$$W(x_{cm}(t) | x_{cm}(0)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{cm}^2(t)}} \exp \left\{ -\frac{[x_{cm}(t) - x_{cm}(0) - v_{cm}t]^2}{2\sigma_{cm}^2(t)} \right\}, \quad (3)$$

donde la desviación estándar de la distribución, σ_{cm}^2 , está dada por

$$\sigma_{cm}^2 = \frac{k_B T}{8\pi\eta R_{max}} \left(1 - \frac{\Delta R}{2R_{max}} \right) \tau, \quad (4)$$

siendo k_B la constante de Boltzmann, T la temperatura del fluido en el que el motor está inmerso, $\Delta R = R_{max} - R_{min}$, y τ el tiempo promedio que el motor pasa en una de sus dos posibles configuraciones: estirado ($x_r > l$), o contraído ($x_r < l$).

Adicionalmente, en la Eq. (3), se ha introducido la velocidad promedio del motor, v_{cm} , como

$$v_{cm} = \frac{1 - \zeta\tau}{6\pi\sqrt{2\pi}l^2} \frac{\Delta R}{R_{max}} \frac{\sqrt{8k_B T}}{\eta}. \quad (5)$$

En la Ref. [11], hemos estimado que la posible rapidez que podría alcanzar un motor browniano operando bajo las condiciones del modelo descrito en esta sección sería de alrededor de 0.01 μ m/s.

B. Generalización al caso de potenciales moleculares
El modelo anteriormente descrito puede generalizarse para tomar en cuenta fuerzas internas en el motor browniano, que sean matemáticamente más cercanas a las que diversos sistemas moleculares exhiben en la realidad. Por ejemplo, la interacción entre las partículas esféricas del motor, en vez de ser puramente elástica, podría escribirse como la superposición de dos potencial.

El primero, un potencial puramente atractivo, no lineal, como lo es el llamado potencial no-lineal de extensión finita (FENE, por sus siglas en inglés),

$$U_{FENE} = -\frac{k}{2}l_{max} \ln \left[1 + \left(\frac{x_r}{l_{max}} \right)^2 \right], \quad (6)$$

que considera el hecho de que las cadenas moleculares no pueden, en la realidad, extenderse de manera infinita sino que tienen una extensión máxima, lmax.

Por otra parte, una segunda contribución podría provenir de la interacción repulsiva, muy fuerte, que las esferas del motor deberían ejercer entre sí al estar en contacto. En simulaciones numéricas es común representar tal interacción en términos del llamado potencial de Weeks-Chandler-Andersen (WCA),

$$U_{WCA} = \begin{cases} 4\epsilon \left[\left(\frac{\sigma}{x_r} \right)^{12n} - \left(\frac{\sigma}{x_r} \right)^{6n} + \frac{1}{4} \right], & \text{si } x_r < 2^{1/6n}\sigma; \\ 0, & \text{otro caso;} \end{cases} \quad (7)$$

en donde ϵ y σ , son respectivamente, la intensidad y el alcance de la interacción, mientras que n es un número entero, positivo, que al incrementarse hace que UWCA sea más cercano a una potencial repulsivo de intensidad infinita (una parte rígida).

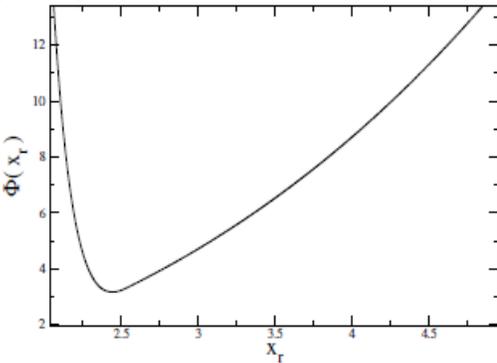


Fig. 2. Potencial molecular, FENE + WCA

La figura muestra el potencial obtenido de la superposición de UFENE con UWCA. Tal como puede apreciarse, el potencial

$U_{mol} = U_{FENE} + U_{WCA}$, guarda cierta similitud con potencial armónico, aunque U_{mol} es en realidad asimétrico y crece con mucha mayor rapidez que éste último.

Bajo la suposición de que los cambios morfológicos son pequeños y lentos, se obtiene la siguiente expresión para la velocidad promedio del motor browniano operando bajo la acción de U_{mol} ,

$$v_{e.m.} = \alpha_{eff} \frac{\Delta}{4} [(1 - 2\zeta\tau_-) \bar{x}_{r,+} - (1 - 2\zeta\tau_+) \bar{x}_{r,-}] + \frac{R_{min}^2 \zeta^2 \Delta R \bar{\tau}_- \bar{\tau}_+}{\bar{\tau}_- + \bar{\tau}_+} \left(\frac{1}{\langle x_r^2 \rangle_+} - \frac{1}{\langle x_r^2 \rangle_-} \right), \quad (8)$$

Siendo α_{eff} el valor promedio del tiempo inverso de relajación en el estiramiento del motor, y $\bar{\tau}_-$ y $\bar{\tau}_+$ los periodos de tiempo promedio en las configuraciones contraída y estirada.

En la Ec. (8), los corchetes $\langle \dots \rangle_-$ y $\langle \dots \rangle_+$, representan promedios sobre las configuraciones comprimidas y elongadas, respectivamente.

Cuando el potencial es simétrico y armónico se tiene: $\alpha_{eff} = \alpha$, $\tau_- = \tau_+ = \bar{\tau}$, y $\langle x_r^2 \rangle_- = \langle x_r^2 \rangle_+ = k_B T/k$. En este caso, la Ec. (8) se reduce a la Ec. (5).

C. Motor basado en potenciales de sierra intermitentes

Para el modelo de potencial de sierra consideraremos la propuesta clásica formulada en la Ref. [13] que consiste de un potencial periódico $V(x) = V(x \square L)$, donde L es el periodo espacial del potencial. El carácter asimétrico del potencial puede conseguirse definiéndolo de la forma

$$V(x) = \begin{cases} \frac{h}{a}x & \text{si } 0 < x < a, \\ \frac{h}{L-a}(L-x) & \text{si } a < x < L, \end{cases} \quad (9)$$

en donde h representa el máximo valor de la barrera energética y a es la posición de este máximo. Nótese que es a partir de esta definición que el potencial se identifica como un potencial de sierra, como el que se ilustra esquemáticamente en la figura 3.

Por otra parte, se supondría que el potencial se apaga por un tiempo $m\tau$ y está prendido por un tiempo $T \square m\tau$, siendo T el periodo temporal. Para prender y apagar el potencial, V se multiplica por la función $\Phi(t)$ definida por

$$\Phi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < t < m\tau, \\ 1 & \text{si } m\tau < t < T. \end{cases} \quad (10)$$

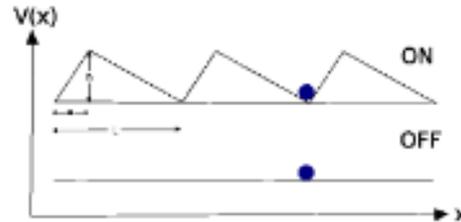


Fig. 3. Motor browniano basado en el mecanismo de sierra intermitente.

La fuerza a la que estará sujeta el motor browniano puede obtenerse a partir de la relación usual

$$F(x,t) = -\frac{\partial V(x)}{\partial x} \Phi(t), \quad (11)$$

Es posible demostrar que la aplicación de esta fuerza rectifica el movimiento de una partícula browniana, de tal manera que si $a < L/2$, la dirección promedio del movimiento es positiva, mientras que si $a > L/2$, la rectificación ocurre hacia valores negativos de x [13].

La forma en la que este motor browniano opera es la relación entre el asimetría temporal y la asimetría espacial, en el caso $a < L/2$ tenemos que elegir un tiempo de apagado $m\tau$ de tal manera que sea más probable que la partícula se difunda una distancia a que se difunda una distancia $L \square a$.

De esta manera si recorre una distancia a a la derecha desde el mínimo del potencial caer al siguiente mínimo, de la misma forma si recorre una distancia a a la izquierda no lograr cruzar el máximo anterior del potencial lo que hará que regrese a su posición inicial cuando el potencial se vuelva a prender. De esta forma logra rectificar el movimiento en una sola dirección preferida, si $a > L=2$ la rectificación ocurrirá en la dirección opuesta.

III. SIMULACIONES

Utilizamos un método de Runge-Kutta de cuarto orden para resolver numéricamente las ecuaciones de 1 y 2, agregando el término de la ecuación 11 a cada partícula, las fuerzas estocásticas fueron tomadas de un método de Monte Carlo. Los parámetros fijos usados para las simulaciones fueron $R_{min} = 1$, como unidad de longitud, $m = 1$ como unidad de masa, y $k_B T = 1$ como unidad de energía. Las unidades de tiempo son derivadas de las unidades anteriores $ut = R_{min} p m = k_B T$. Las simulaciones fueron hechas por 50; 000ut con incrementos de $10 \square 3ut$. El primer grupo de simulaciones fue hecho sin hacer cambio de radios, con el propósito de encontrar los parámetros de tiempo que maximizan la velocidad de transporte para el modelo de potencial de sierra.

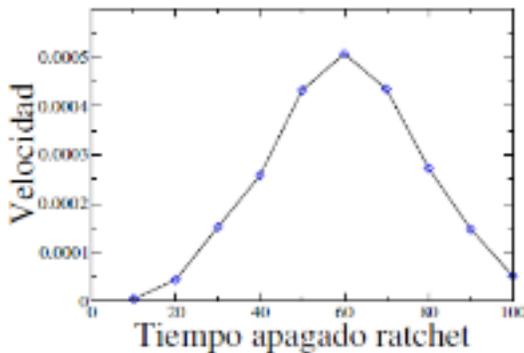


Fig. 4. Gráfica del tiempo que pasa apagado el potencial de sierra, contra velocidad.

Podemos ver la dependencia de la velocidad con el tiempo, observamos que existe un tiempo que maximiza la velocidad, si aumentamos el tiempo que pasa apagado el ratchet desde 0:0ut hasta 60:0ut en este último es donde tendremos el tiempo que maximiza la velocidad, cualquier valor posterior a este resultará en una velocidad menor. Los parámetros del potencial de sierra fueron $L = 10$, $h = 10$, $a = 1$ y encontramos que la velocidad es máxima para $mt = 60$ con un periodo de $T = 100$, como se puede ver en la Figura 3. Nótese que L y a son unidades de longitud mientras que h es unidad de energía. En términos de energía, el potencial es 10 veces mas fuerte que la energía del baño térmico $k_B T$. Por otro lado los parámetros utilizados para el potencial molecular U_{mol} por parte del potencial UWCA fueron: $_ = 1:25$, $= 2:0$ y $n = 2:0$, por otro lado los parámetros del potencial FENE UFENE fueron $H = 0:15$ $L_{max} = 20$.

Para poder comparar ambos modelos, configuramos los parámetros de simulación de tal forma que el potencial de sierra llevara al nadador a la izquierda, mientras que el nadador

se moviera a la derecha por cambios morfológicos.

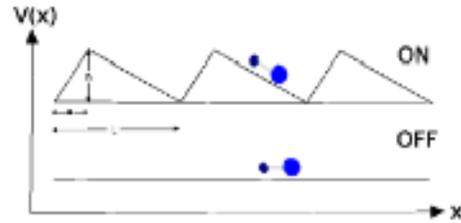


Fig. 5. Cambios morfológicos contra el potencial

Los parámetros usados en esta simulación fueron $h = 10$, $L = 10$ y $a = 9$. Para cada simulación cambiamos la diferencia de radios porcentual desde 0.00 hasta 0.25.

Podemos ver los resultados de las simulaciones en la Figura 5, corrimos seis simulaciones variando el cambio porcentual de radios desde 0.00 hasta 0.25, incrementando en 0.05 por cada simulación. Podemos ver que la simulación del cambio porcentual 0.00, el nadador se movió completamente a la izquierda a velocidad casi constante, mientras que en la simulación del cambio porcentual 0.25 se movió a la derecha, es decir que el nadador de cambios morfológicos con un cambio porcentual de 0.25 en su radio máximo, logró vencer al potencial de sierra intermitente en el valor de velocidad máxima que encontramos para este.

Calculamos la velocidad promedio de cada caso calculando la pendiente de una recta ajustada a cada trayectoria. En la Tabla 1 está la velocidad del centro de masa correspondiente al cambio porcentual del radio máximo respecto al mínimo.

ΔR	$\nu = 0.02$	$\nu = 0.05$	$\nu = 0.10$
0.00	-1.79895×10^{-3}	-4.95546×10^{-4}	-1.45316×10^{-3}
0.05	-1.45387×10^{-3}	3.13277×10^{-4}	-6.73684×10^{-6}
0.10	-1.03919×10^{-3}	1.71512×10^{-4}	1.32356×10^{-5}
0.15	-8.84058×10^{-4}	1.04409×10^{-4}	5.60067×10^{-5}
0.20	-5.66913×10^{-4}	2.39957×10^{-5}	1.04391×10^{-4}
0.25	-4.03613×10^{-4}	6.58606×10^{-5}	1.64758×10^{-4}
0.30	-2.13971×10^{-4}	1.53431×10^{-4}	1.60829×10^{-4}
0.35	$+1.08152 \times 10^{-4}$	3.05321×10^{-4}	2.23135×10^{-4}
0.40	$+2.46594 \times 10^{-4}$	4.40583×10^{-4}	3.51248×10^{-4}
0.45	$+5.62544 \times 10^{-4}$	4.97151×10^{-4}	2.92948×10^{-4}
0.50	$+8.09815 \times 10^{-4}$	6.41180×10^{-4}	4.4939×10^{-4}

TABLE I
VELOCIDADES CONTRA CAMBIO DE RADIOS PARA VARIAS VISCOSIDADES CINEMÁTICAS $_ = 0:02; 0:05; 0:10$, PODEMOS OBSERVAR QUE CONFORME AUMENTA LA VISCOSIDAD TAMBIÉN AUMENTA LA VELOCIDAD

en la figura podemos ver que para un cambio morfológico nulo $_ = 0:0$, tenemos la velocidad mínima, porque el ratchet mueve al nadador en la dirección opuesta en la de los cambios morfológicos, pero también podemos ver que conforme aumentamos la asimetría del nadador, se mueve cada vez más rápido hasta que para un cambio $_ = 0:10$ logra vencer al ratchet y moverse en la dirección opuesta y alcanzar una velocidad considerable para $_ = 0:50$.

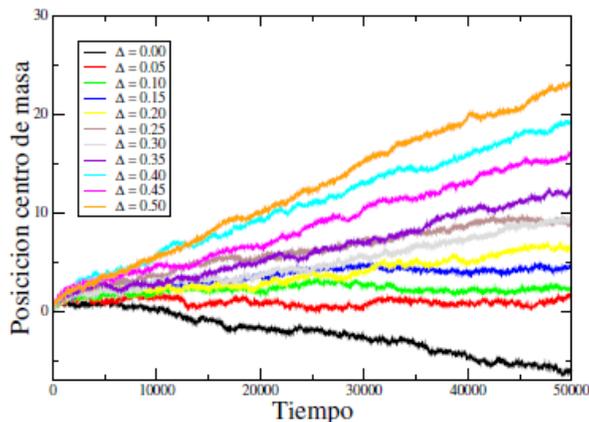


Fig. 6. Gráfica posición contra tiempo para diferentes valores de radio máximo.

IV. CONCLUSIONES

Comparamos la dinámica de un motor browniano de cambios morfológicos contra el potencial de sierra intermitente. Cualquier sistema que utilice ruido térmico para generar movimiento en una dirección preferida necesita una asimetría espacial y una temporal. El nadador de cambios morfológico cumple estas características, la asimetría espacial se cumple con la diferencia de radios y la temporal haciendo el cambio de radios en el tiempo correcto. El potencial de sierra también cumple estas características, la asimetría espacial está en la forma de sierra y la temporal apagando y prendiendo el potencial. En la Figura 5 pudimos ver velocidades equiparables en ambos casos, al final el nadador logró ir en contra del potencial de sierra. Otra ventaja que ofrece el nadador es la autonomía, el nadador no necesita de un sustrato para moverse, a diferencia del potencial que necesita ser creado de forma externa.

No sabemos si existan sistemas microscópicos naturales o artificiales que presenten movimiento dirigido basados en los mecanismos que presentamos en este trabajo, pero queremos dejar en claro que los sistemas biológicos que presentan ciertas similitudes a nuestro modelo como algunas especies de protozoarios y euglena no pueden considerarse sistemas físicos de nuestro modelo, debido que los cambios morfológicos en dichos sistemas no dependen del bombardeo molecular, estos sistemas operaran en escalas mucho mayores a nuestra propuesta. Sin embargo, podemos ver que existen sistemas microscópicos que exhiben las características, especialmente el cambio de fuerzas de arrastre controlados por modificaciones morfológicas. Se han propuesto algunas estructuras moléculas con cambios morfológicos [12] como soluciones potenciales para nano-nadadores teóricos.

REFERENCES

- [1] Sauvage, Stoddart and Feringa (2016) Molecular Machines Scientific Background on the Nobel Prize in Chemistry 2016
- [2] Chandrasekhar, S. (1943). Stochastic Problems in Physics and Astronomy. Reviews of Modern Physics, 15(1), 1-89. doi:10.1103/revmodphys.15.1
- [3] R. P. Feynman, R. B. Leighton and M. Sands (1966) The Feynman Lectures on Physics (Addison Wesley, Reading, MA), Vol. 1, chapt. 46.
- [4] H'anggi P and Bartsussek R 1996 Brownian rectifiers: how to convert Brownian motion into directed transport, in Nonlinear Physics of Complex Systems (Berlin: Springer) p 294
- [5] K. Svoboda, C. F. Schmidt, B. J. Schnapp and S. M. Block, (1993) Direct observation of kinesin stepping by optical trapping interferometry, Nature 365 721
- [6] H. Lodish, A. Berk, S. Lawrence Zipursky, P. Matsudaira, (2000) D. Baltimore and J. Darnell, Molecular Cell Biology, 4th edition, (W. H. Freeman, New York)
- [7] Noji, H., Yasuda, R., Yoshida, M., Kinosita, K. (1997). Direct observation of the rotation of F1-ATPase. Nature, 386(6622), 299-302.
- [8] D. Saffert, S. Engelbrecht and W. Junge, Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A. 94 (1998) 4401
- [9] P. M. Hoffmann (2012) Life's Ratchet (Basic Books, New York)
- [10] F. Amb'ia and H. H'ijar, (2016) Langevin model for a Brownian system with directed motion JPCS 738 012037
- [11] F. Amb'ia and H. H'ijar, (2017) dynamics of a Brownian motor based on morphological changes Rev. Mex. Fis. 63(4) 314.
- [12] S. Erbas-Cakmak, D. A. Leigh, C. T. McTernan, and A. L. Nussbaumer, (2015) Artificial Molecular Machines Chem. Rev. 115 10081
- [13] J. Prost and J. F. Chauwin, (1994) textitAssymmetric pumping of particles, Phys. Rev. Lett.